Transformaciones Lineales

Definición de transformación

Una función, aplicación o transformación es un conjunto de operaciones que se realizan sobre un elemento de un espacio vectorial V, para convertirlo en un elemento de otro espacio vectorial W.

EJEMPLO 3.1. Sean los espacios vectoriales

$$V = \{ax^2 + bx + c | a, b, c \in \mathbb{R}\} \qquad \text{y} \qquad W = \{(a, b, c) | a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

y la transformación $T: V \to W$ definida por $T(ax^2 + bx + c) = (a + 1, b + c, 0)$.

Se observa fácilmente que cualquier elemento de V se convierte en un elemento de W, tras aplicársele la transformación T. Por ejemplo, si $\bar{v} = -2x^2 + x - 2$, al aplicarle la transformación T, se obtiene:

$$\begin{aligned} T(-2x^2 + x - 2) &= (-2 + 1, 1 - 2, 0) \\ &= (-1, -1, 0) \end{aligned}$$

Por lo que el polinomio de V se convirtió en una terna ordenada perteneciente a W.

EJEMPLO 3.2. Sea M_2 el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden dos con elementos reales, y una transformación $H: M_2 \to M_2$ que se define como

$$H\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b + c \\ -b - c & d \end{pmatrix}$$

En este caso, la transformación se aplica del mismo espacio al mismo espacio. Por ejemplo, para el vector $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ se tiene que la transformación obtenida es

$$\begin{aligned} H\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 + 0 \\ -(-1) - 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dominio, codominio, núcleo y recorrido de una transformación.

Al igual que las funciones tradiciones, las transformaciones tienen tres partes esenciales para existir: el dominio, el codominio, y la regla de asignación, como se observa en la figura 3.1.

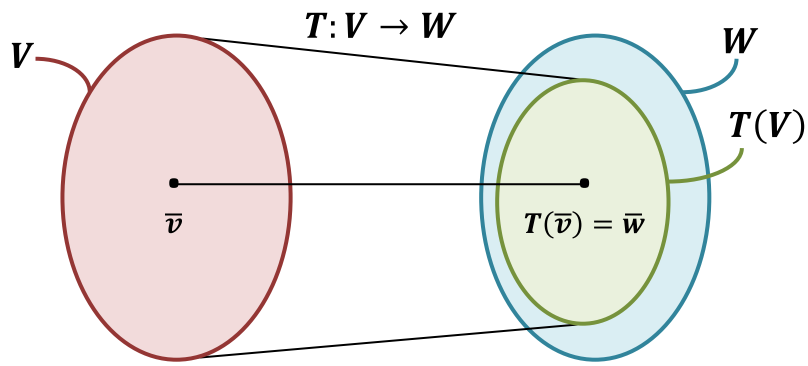

Figura 3.1. Diagrama de Venn de una transformación. V es el dominio, W el codominio, T la regla de asignación y $T(V)$ es el recorrido.

El dominio es el espacio vectorial V al cual se le aplicará la transformación; el codominio es el espacio W al cual pertenece el resultado de aplicar la transformación; la regla de asignación T es la forma en la cual se debe manipular un elemento de V para convertirlo en un elemento de W; finalmente, $T(V)$ es el recorrido de la transformación, y es el subconjunto de W obtenido a partir de la aplicación de la transformación a cada elemento de V.

EJEMPLO 3.3. Sea la transformación $S: \mathbb{R}^4 \to P_1$, definida por la regla de asignación

$$S(a, b, c, d) = (a + d)x + (b - c)$$

donde $\mathbb{R}^4$ es el espacio vectorial de los cuartetos ordenados con elementos reales, y P_1 es el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a uno.

En este caso, el dominio de S será el espacio $\mathbb{R}^4$; en tanto que el codominio es P_1. Para obtener el recorrido de la transformación se requiere obtener uno de sus conjuntos generadores. Esto se logra a partir de la transformación de una base del dominio; es decir, si se aplica la transformación a la base de $\mathbb{R}^4$

$$B = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$$

Se obtendrá un conjunto generador:

$$\begin{aligned} S(1,0,0,0) &= x \\ S(0,1,0,0) &= 1 \\ S(0,0,1,0) &= -1 \\ S(0,0,0,1) &= x \end{aligned}$$

Entonces, el conjunto generador del recorrido es

$$G = \{x, 1, -1, x\}$$

Como se observa, el conjunto G también es generador de P_1. En este caso, el recorrido y el codominio son el mismo.

EJEMPLO 3.4. Para la transformación $T: \mathbb{C} \to M_2$ definida por

$$T(x + yi) = \begin{pmatrix} x & -y \\ -y & x + y \end{pmatrix}$$

donde $\mathbb{C}$ (dominio) es el espacio vectorial de los números complejos sobre el campo real, y M_2 (codominio) es el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden dos sobre el campo real.

El recorrido se obtendrá por medio del conjunto generador resultante de transformar la base $\{1, i\}$.

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$T(i) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para este caso $M_2 \neq T(\mathbb{C})$. Utilizando la ecuación de dependencia lineal

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Y teniendo el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a \\ -\alpha_2 &= b \\ -\alpha_2 &= c \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= d \end{aligned}$$

Se obtiene que el espacio generado por el conjunto $\{T(1), T(i)\}$ es

$$\begin{aligned} T(\mathbb{C}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| b = c, d = a - b; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a-b \end{pmatrix} \middle| a, c \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Dentro de las transformaciones existe un subconjunto especial llamado núcleo. El núcleo es parte del dominio y es el conjunto de vectores de V cuya transformación bajo T tiene como único resultado al vector nulo del espacio W (codominio). Es decir, si se tiene una transformación $T: V \rightarrow W$ y existe un subconjunto $U \subset V$ tal que $T(U) = \bar{0}_W$, entonces el subconjunto U es el núcleo de la transformación T.

EJEMPLO 3.5. Sean el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales, y la transformación $T: P_2 \rightarrow P_2$ definida por

$$T(ax^2 + bx + c) = (a + 2b - c)x^2 + (b + c)x + (a + b - 2c)$$

Para obtener el núcleo de la transformación se debe considerar que al transformar un polinomio se obtendrá el polinomio nulo; es decir,

$$T(ax^2 + bx + c) = 0x^2 + 0x + 0$$

entonces,

$$\begin{aligned} T(ax^2 + bx + c) &= (a + 2b - c)x^2 + (b + c)x + (a + b - 2c) \\ &= 0x^2 + 0x + 0 \end{aligned}$$

De aquí se plantea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$0x^2 + 0x + 0 = (a + 2b - c)x^2 + (b + c)x + (a + b - 2c)$$

$$\begin{aligned} a + 2b - c &= 0 \\ b + c &= 0 \\ a + b - 2c &= 0 \end{aligned}$$

donde se obtiene que el conjunto solución es $(-3b, b, -b)$; por lo tanto, el núcleo de la transformación será aquel que cumpla las condiciones $a = -3b$ y $c = -b$, es decir,

$$N(T) = \{-3bx^2 + bx - b | b \in \mathbb{R}\}$$

Se puede verificar que si se aplica la transformación al vector $\bar{n} = -3bx^2 + bx - b$, se obtendrá el polinomio nulo.

$$\begin{aligned} T(-3bx^2 + bx - b) &= [-3b + 2b - (-b)]x^2 + [b + (-b)]x + [-3b + b - 2(-b)] \\ &= (-3b + 3b)x^2 + (b - b)x + (-3b + 3b) \\ &= 0x^2 + 0x + 0 \end{aligned}$$

Se debe recalcar que el núcleo es un subconjunto del dominio; en este ejemplo tanto el dominio como el codominio son el mismo espacio vectorial, pero no siempre sucede así.

Definición de transformación lineal

Como se ha visto, una transformación tiene tres elementos esenciales: el dominio, el codominio y la regla de correspondencia; además, tiene dos características importantes derivadas de las tres antes mencionadas: el recorrido (perteneciente al codominio) y el núcleo (parte del dominio).

En Álgebra Lineal se ha hablado de operaciones de suma de vectores y de multiplicación por un escalar; para que una transformación sea caso de estudio en el Álgebra Lineal, es necesario que mantenga dichas operaciones válidas a lo largo de la transformación. Es así como surge el concepto de transformación lineal.

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo campo K y una transformación $T: V \to W$. Se dice que T es una transformación lineal si satisface $\forall\ \bar{u}, \bar{v} \in V$ y $\forall\ \alpha \in K$ las propiedades

- ✓ $T(\bar{u} + \bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$ (Principio de superposición).
- ✓ $T(\alpha\bar{u}) = \alpha T(\bar{u})$ (Principio de homogeneidad).

Es decir, T es lineal si preserva las dos operaciones definidas dentro del espacio vectorial: suma de vectores y multiplicación de un escalar por un vector.

EJEMPLO 3.6. Sean los espacios vectoriales

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W = \{a | a \in \mathbb{R}\}$$

ambos sobre el campo de los reales. Debe verificarse si las transformaciones $T: V \to W$ y $S: W \to V$ son transformaciones lineales, donde

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 2a - b + c - d$$

$$S(a) = \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a+1 \end{pmatrix}$$

Para el caso de la transformación T se tiene lo siguiente.

Superposición:

$$T\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$
$$T\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} = (2a_1 - b_1 + c_1 - d_1) + (2a_2 - b_2 + c_2 - d_2)$$
$$2(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2) - (d_1 + d_2) = (2a_1 - b_1 + c_1 - d_1) + (2a_2 - b_2 + c_2 - d_2)$$

Por propiedades de la suma y la multiplicación de los números reales, se concluye que la propiedad se cumple, ya que la última expresión es cierta.

Homogeneidad:

$$T\left(\alpha\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\right) = \alpha T\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$$
$$T\begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 \end{pmatrix} = \alpha(2a_1 - b_1 + c_1 - d_1)$$
$$2\alpha a_1 - \alpha b_1 + \alpha c_1 - \alpha d_1 = \alpha(2a_1 - b_1 + c_1 - d_1)$$

En este caso se tiene que por propiedades de la distribución en los números reales, la propiedad se cumple. Al cumplir la superposición y la homogeneidad, se concluye que T es una transformación lineal.

Para la transformación S se probará primero la homogeneidad.

Homogeneidad:

$$S(\alpha a) = \alpha S(a)$$
$$\begin{pmatrix} \alpha a & -\alpha a \\ -\alpha a & \alpha a + 1 \end{pmatrix} \neq \alpha\begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a+1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \alpha a & -\alpha a \\ -\alpha a & \alpha a + 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \alpha a & -\alpha a \\ -\alpha a & \alpha a + \alpha \end{pmatrix}$$

En esta última expresión se confirma que el elemento en el renglón dos, columna dos no es el mismo; por lo tanto la propiedad no se cumple y la transformación S no es lineal.

No es necesario probar la superposición ya que S no posee homogeneidad.

Los subespacios núcleo y recorrido de una transformación lineal

Las transformaciones lineales también tienen subconjuntos dentro del dominio y del codominio; como se vio en el apartado anterior, dichos subconjuntos son el núcleo y el recorrido, respectivamente. De manera especial, dentro de las transformaciones lineales dichos subconjuntos forman también subespacios, los cuales forman la base de un teorema que se verá más adelante.

Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal. Los subespacios $T(V)$ (recorrido de la transformación) y $N(T)$ (núcleo de la transformación) se definen como:

1. $T(V) = \{T(\bar{v}) \in W | \forall\, \bar{v} \in V\}$
2. $N(T) = \{\bar{v} \in V | T(\bar{v}) = \bar{0} \in W\}$

EJEMPLO 3.7. Sea la transformación lineal $X: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$X(w, x, y, z) = (w + 2x + 3y + z, w + 3x + 5y - 2z, 3w + 8x + 13y - 3z)$$

Para obtener su núcleo y recorrido se procede de la siguiente manera.

Recorrido. Al transformar una base del dominio, se obtendrá un conjunto generador del recorrido; se utilizará la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} X(1,0,0,0) &= (1,1,3) \\ X(0,1,0,0) &= (2,3,8) \\ X(0,0,1,0) &= (3,5,13) \\ X(0,0,0,1) &= (1,-2,-3) \end{aligned}$$

Por lo que el conjunto generador será $G = \{(1,1,3), (2,3,8), (3,5,13), (1,-2,-3)\}$; con éste se establece el espacio generado, utilizando los vectores como renglones de una matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 5 & 13 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Al escalonar esta matriz y obtener la base del espacio renglón, se podrá obtener el recorrido de la transformación.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 5 & 13 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que la base canónica del subespacio es $\{(1,0,1), (0,1,2)\}$, y ésta genera al subespacio

$$X(\mathbb{R}^4) = \{(a, b, a + 2b) | a, b \in \mathbb{R}\}$$

Que es el recorrido de la transformación.

Núcleo. Para el núcleo se utiliza directamente la regla de asignación, igualada al vector nulo del codominio.

$$\begin{aligned} X(w, x, y, z) &= (w + 2x + 3y + z, w + 3x + 5y - 2z, 3w + 8x + 13y - 3z) \\ &= (0,0,0) \end{aligned}$$

Y se genera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{ccccccc} w & +2x & +3y & +z & = & 0 \\ w & +3x & +5y & -2z & = & 0 \\ 3w & +8x & +13y & -3z & = & 0 \end{array}$$

Y la solución se da por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 13 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Al replantear el sistema de ecuaciones se tiene que

$$\begin{array}{cccccc} w & & -y & +7z & = & 0 \\ & x & +2y & -3z & = & 0 \end{array}$$

y el conjunto solución es

$$N(X) = \{(y - 7z, -2y + 3z, y, z) | y, z \in \mathbb{R}\}$$

que también es el núcleo de la transformación lineal.

En este ejemplo se verifica que tanto el núcleo como el recorrido son subespacios, ya que en ambos se cumple la respectiva cerradura para la suma de vectores y multiplicación por un escalar; además, cada subespacio contiene al vector nulo respectivo.

EJEMPLO 3.8. Sea la transformación lineal $R: \mathbb{R}^3 \to M_2$, definida por

$$R(x, y, z) = \begin{pmatrix} -x + y & x - y \\ z & x - y - z \end{pmatrix}$$

Para obtener el recorrido se tiene que establecer la transformación de una base del dominio. En este caso, se manipulará la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

$$R(1,0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$R(0,1,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$R(0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Para encontrar el espacio generado por el conjunto $\left\{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$ se acude a una combinación lineal:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Y se resuelve el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{cccccc} -\alpha_1 & +\alpha_2 & & = & a \\ \alpha_1 & -\alpha_2 & & = & b \\ & & \alpha_3 & = & c \\ \alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & = & d \end{array}$$

Al escalonar la matriz de coeficientes se tiene que

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \vdots & a \\ 1 & -1 & 0 & \vdots & b \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & c \\ 1 & -1 & -1 & \vdots & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \vdots & a \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a+b \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & c \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & a+d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \vdots & a \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & c \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a+b \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & a+d \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \vdots & a \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & c \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a+b \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a+c+d \end{pmatrix}$$

Por lo que las restricciones $a+b=0$ y $a+c+d=0$ le darán forma al recorrido de la transformación:

$$R(\mathbb{R}^3) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ c & -a-c \end{pmatrix} \middle| a, c \in \mathbb{R} \right\}$$

El núcleo de la transformación utiliza directamente la regla de asignación.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y & x-y \\ z & x-y-z \end{pmatrix}$$

Y se obtiene

$$\begin{array}{cccccc} -x & +y & & = & 0 \\ x & -y & & = & 0 \\ & & z & = & 0 \\ x & -y & -z & = & 0 \end{array}$$

Directamente, se deduce que $z=0$ y $x=y$; por lo que el núcleo de la transformación es

$$N(R) = \{(x, x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$$

Para este caso, también se satisface que el recorrido es subespacio vectorial del codominio, y el núcleo es subespacio vectorial del dominio.

Caso de dimensión finita: relación entre las dimensiones del dominio, recorrido y núcleo de una transformación lineal.

Existe una relación interesante entre las dimensiones de núcleo, el recorrido y el dominio de una transformación lineal; esta relación es fundamental en los espacios vectoriales de dimensión finita.

Sean los espacios vectoriales V de dimensión n, W de dimensión m, y la transformación lineal $T: V \to W$. Se establece

$$\dim V = \dim N(T) + \dim T(V)$$

Se debe recalcar que $\dim V \geq \dim N(T)$ y $\dim W \geq \dim T(V)$; las relaciones de igualdad se establecerán más adelante, cuando se trate el tema de isomorfismo, transformación identidad y transformación nula.

Como una nota adicional, muchas ocasiones la dimensión del recorrido se conoce como rango, y la dimensión del núcleo como nulidad.

EJEMPLO 3.9. Sean los espacios vectoriales y las transformaciones lineales consideradas en los ejemplos 3.7 y 3.8.

Para el primer caso, $X: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$X(w, x, y, z) = (w + 2x + 3y + z, w + 3x + 5y - 2z, 3w + 8x + 13y - 3z)$$

Se tiene que el núcleo y el recorrido son, respectivamente,

$$N(X) = \{(y - 7z, -2y + 3z, y, z) | y, z \in \mathbb{R}\} \qquad \text{y} \qquad X(\mathbb{R}^4) = \{(a, b, a + 2b) | a, b \in \mathbb{R}\}$$

Se sabe que la dimensión del dominio es cuatro; por otro lado, la dimensión del núcleo es dos y la del recorrido es dos; por lo tanto, se satisface que

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{R}^4 &= \dim N(X) + \dim X(\mathbb{R}^4) \\ 4 &= 2 + 2 \end{aligned}$$

Como el dominio es de dimensión finita, se satisface el teorema mencionado al inicio de este apartado.

En el segundo caso, la transformación lineal $R: \mathbb{R}^3 \rightarrow M_2$ se define por

$$R(x, y, z) = \begin{pmatrix} -x + y & x - y \\ z & x - y - z \end{pmatrix}$$

cuyo núcleo y recorrido son

$$N(R) = \{(x, x, 0) | x \in \mathbb{R}\} \qquad \text{y} \qquad R(\mathbb{R}^3) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ c & -a - c \end{pmatrix} \middle| a, c \in \mathbb{R} \right\}$$

que tienen una nulidad igual a uno, y un rango equivalente a dos; como la dimensión del dominio es tres, se satisface la ecuación

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{R}^3 &= \dim N(R) + \dim R(\mathbb{R}^3) \\ 3 &= 1 + 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, también se comprueba que el teorema de dimensiones es válido.

Isomorfismo entre espacios vectoriales

Dentro de las transformaciones lineales se puede establecer una relación de equivalencia entre los espacios vectoriales. Por ejemplo, si se tiene al espacio vectorial V y una transformación lineal de la forma $T: V \rightarrow V$ definida por

$$T(\bar{v}) = \bar{v}, \forall\, \bar{v} \in V$$

Se tiene que la transformación lineal aplica al espacio V en él mismo; esta transformación se conoce como transformación identidad y se denota como

$$I: V \to V$$

Adicionalmente, esta transformación tiene las propiedades de ser suprayectiva e inyectiva. Recuérdese que una función suprayectiva establece que el recorrido es el codominio; es decir, la función relaciona al dominio sobre el codominio. En tanto que una función inyectiva establece que a cada elemento del recorrido se le asocia con uno sólo del dominio; es decir, la función es uno a uno entre el dominio y el codominio.

EJEMPLO 3.10. La transformación identidad $I: P_2 \to P_2$ definida por

$$I(ax^2 + bx + c) = ax^2 + bx + c$$

Establece que cada polinomio del dominio P_2 se convertirá en un polinomio del codominio P_2; es decir, todo el codominio está cubierto por el dominio, o el recorrido de la transformación es el mismo codominio. En este caso la función es suprayectiva.

La transformación también presenta la naturaleza de que cada polinomio será transformado en sí mismo; por ejemplo, el polinomio del dominio $\bar{p} = x^2 + x + 1$ solo tiene un asociado en el codominio: él mismo.

$$I(x^2 + x + 1) = x^2 + x + 1$$

Si se establece con el polinomio genérico esta aseveración se confirmará que a cada elemento del dominio le corresponde uno y sólo uno del codominio; es decir, la transformación es inyectiva.

Existen transformaciones lineales, no necesariamente la transformación identidad, que son suprayectivas e inyectivas. Dichas aplicaciones son conocidas como isomorfismos.

Sean dos espacios vectoriales V y W, y una transformación lineal $T: V \to W$. Los espacios V y W son isomorfos entre sí, sólo si T es inyectiva y suprayectiva; entonces, a T se le conoce como isomorfismo. A un isomorfismo se le denotara como Is, y a los espacios vectoriales isomorfos como $V \cong W$.

Los isomorfismos cumplen con propiedades importantes. Sean los espacios isomorfos V, W, y el isomorfismo $Is: V \to W$. Para esta transformación se cumple que

- ✓ Su núcleo es el vector nulo: $N(Is) = \{\bar{0}\}$
- ✓ Es no-singular; es decir, tiene una transformación inversa.
- ✓ Una base cualquiera del dominio se transforma en una base del codominio.

EJEMPLO 3.11. Sea la transformación lineal $T: D_3 \to P_2$ entre los espacios

$$D_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{y} \qquad P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

Definida como

$$T\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = (a - b)x^2 + bx + (a - c)$$

Para verificar si la transformación lineal es un isomorfismo, se debe considerar que se cumplen las tres propiedades mencionadas anteriormente.

Núcleo de la transformación:

$$T\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = (a-b)x^2 + bx + (a-c)$$
$$= 0x^2 + 0x + 0$$

Se obtiene que

$$\begin{array}{cccccc} a & -b & & = & 0 \\ & b & & = & 0 \\ a & & -c & = & 0 \end{array}$$

De la segunda ecuación se deduce que la única solución validad para el SELH es la solución trivial; por lo tanto, el núcleo de la transformación es el vector nulo.

Transformación de una base:

La base que se utilizará para el dominio será

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Por lo que la transformación será:

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = x^2 + 1$$
$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -x^2 + x$$
$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

Debido a que el conjunto $\{x^2 + 1, -x^2 + x, -1\}$ es generador del recorrido, se necesita corroborar que es una base del codominio; por lo tanto, se recurre a la ecuación de dependencia lineal

$$\alpha_1(x^2 + 1) + \alpha_2(-x^2 + x) + \alpha_3(-1) = 0x^2 + 0x + 0$$

Del sistema de ecuaciones resultante

$$\begin{array}{ccccc} \alpha_1 & -\alpha_2 & & = & 0 \\ & \alpha_2 & & = & 0 \\ \alpha_1 & & -\alpha_3 & = & 0 \end{array}$$

Se obtiene que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 0$; por lo tanto, el conjunto analizado es linealmente independiente, y en consecuencia es una base del codominio. Así, se cumple la tercera propiedad del isomorfismo.

Singularidad de la transformación:

Para esta sección se debe tomar en cuenta la matriz asociada a la transformación; dicho concepto se tratará en el siguiente tema. Sin embargo, para comprobar esta propiedad se utilizarán los resultados obtenidos en el punto anterior. El primer elemento considerado será la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 & -\alpha_2 & & = & 0 \\ & \alpha_2 & & = & 0 \\ \alpha_1 & & -\alpha_3 & = & 0 \end{array}$$

Más adelante, se confirmará que esta es la matriz asociada a la transformación lineal, y que está referida a las bases naturales de los espacios vectoriales involucrados. Teniendo esta matriz, se debe verificar que es no-singular; así, se segura que la transformación lineal tiene inversa.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

Como el determinante de la matriz es diferente de cero, eso significa que tiene inversa; por lo tanto la transformación T tiene inversa.

Debido a que la satisfacción de las tres propiedades se cumple, se asegura que T es suprayectiva e inyectiva; por lo tanto, T es un isomorfismo.

EJEMPLO 3.12. Se desea encontrar un isomorfismo entre los espacios vectoriales $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$. Para este ejemplo se tomará al vector genérico y a la base natural de cada espacio vectorial involucrado. Primeramente, se hace una combinación lineal en el dominio:

$$\alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) = (x,y)$$

De donde los escalares tienen valores $\alpha_1 = x$ y $\alpha_2 = y$. Con estos valores se puede reescribir la combinación lineal como

$$x(1,0) + y(0,1) = (x,y)$$

Utilizando las propiedades de linealidad del isomorfismo, se puede expresar:

$$Is\big(x(1,0) + y(0,1)\big) = Is(x,y)$$
$$xIs(1,0) + yIs(0,1) = Is(x,y) \cdots (1)$$

Debido a que el isomorfismo transforma una base del dominio en una base del codominio, se necesita estipular cual será la correspondiente asociación entre los elementos de las bases. Como es posible encontrar varios isomorfismos entre los mismos espacios vectoriales, se puede establecer que las transformaciones de los elementos de la base de $\mathbb{R}^2$ bajo el isomorfismo buscado son:

$$Is(1,0) = -i \cdots (2)$$

$$Is(0,1) = -1 \cdots (3)$$

Donde se observa que el conjunto $\{-i, -1\}$ es una base de $\mathbb{C}$. Al sustituir (2) y (3) en (1) se tiene:

$$x(-i) + y(-1) = Is(x,y)$$
$$-xi - y = Is(x,y)$$

De donde se obtiene que la regla de correspondencia del isomorfismo buscado es

$$Is(x,y) = -y - xi$$

Se puede comprobar fácilmente que esta transformación lineal es inyectiva y suprayectiva; por lo tanto, es un isomorfismo.

Matriz asociada a una transformación lineal con dominio y codominio de dimensión finita

Como se vio en el ejemplo 3.11, es posible asociar a una transformación lineal con una matriz. Existen dos procedimientos válidos para obtener esta matriz. Sin embargo, debe recalcarse que uno de ellos funciona sólo si la transformación estudiada es del tipo $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; el otro procedimiento aplica para cualquier transformación lineal referida a cualquier espacio vectorial.

Al tratar una transformación de la forma $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se puede establecer una matriz asociada con base en la regla de asignación, y viceversa.

Sea $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal entre los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$. Existe una matriz asociada a T, tal que

$$T(\bar{v})^T = M(T)\bar{v}^T$$

Donde $M(T)$ está compuesta de la siguiente manera

$$M(T) = \begin{pmatrix} T(\bar{b}_1)^T & T(\bar{b}_2)^T & T(\bar{b}_3)^T & \cdots & T(\bar{b}_n)^T \end{pmatrix}$$

Siendo $\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3 \ldots, \bar{b}_n\}$ la base canónica del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.

EJEMPLO 3.13. Sea la transformación $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$T(x,y,z) = (x - y + z, -2x, -3y - 2z, x - y - z)$$

Si se utiliza la base canónica del dominio se obtienen las siguientes transformaciones

$$T(1,0,0) = (1,-2,0,1)$$
$$T(0,1,0) = (-1,0,-3,-1)$$
$$T(0,0,1) = (1,0,-2,-1)$$

Esas transformaciones se acomodan en un arreglo matricial, utilizando cada vector como una columna de dicha matriz

$$M(T)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

La matriz obtenida es la matriz asociada a la transformación lineal T. Esta matriz puede utilizarse para obtener la imagen de cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ bajo la transformación T.

Si se desease obtener la transformación del vector $\bar{v}=(1,-1,-4)$ bajo T, se puede utilizar la regla de asignación o la matriz asociada.

Por regla de asignación:

$$T(1,-1,-4)=(-2,-2,11,6)$$

Por matriz asociada:

$$\begin{aligned}T(1,-1,-4)^T&=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -4\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}-2\\ -2\\ 11\\ 6\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Se puede observar que las transformaciones por ambos métodos son iguales.

EJEMPLO 3.14. Dada la transformación $S:\mathbb{R}^4\rightarrow\mathbb{R}^2$, se desea obtener su regla de correspondencia, si se sabe que

$$\begin{aligned}S(1,0,0,0)=-S(0,0,1,0)\Rightarrow(1,0)\\ S(0,1,0,0)=-S(0,0,0,1)\Rightarrow(0,1)\end{aligned}$$

Para este caso, se tiene la matriz asociada a la transformación S, expresada en términos de las transformaciones de los elementos de la base canónica del dominio.

$$\begin{aligned}M(S)&=\begin{pmatrix}T(\hat{h})^T & T(\hat{\imath})^T & T(\hat{\jmath})^T & T(\hat{k})^T\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}T(\hat{h})^T & T(\hat{\imath})^T & -T(\hat{h})^T & -T(\hat{\imath})^T\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Finalmente para obtener la regla de correspondencia de la transformación lineal basta con multiplicar la matriz asociada por el vector genérico del dominio; es decir,

$$S(w,x,y,z)^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w\\ x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

$$S(w,x,y,z)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} w-y \\ x-z \end{pmatrix}$$

donde obtiene que la regla de correspondencia buscada es $S(w,x,y,z) = (w-y, x-z)$.

De manera general, es posible encontrar una matriz asociada a cada transformación lineal cuyos espacios vectoriales son de dimensión finita. Dicha matriz utiliza el concepto fundamental de la matriz de transición desde una base A hasta una base B: el vector de coordenadas.

Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita, $T: V \to W$ una transformación lineal, $A = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n\}$ una base de V, y $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \dots, \bar{b}_m\}$ una base de W. Debido a que B puede generar cualquier vector de W,

$$\bar{w} = \beta_1\bar{b}_1 + \beta_2\bar{b}_2 + \beta_3\bar{b}_3 + \cdots + \beta_m\bar{b}_m$$

La imagen de cualquier vector de V bajo T puede escribirse de la siguiente manera

$$\begin{aligned} T(\bar{v}) &= \bar{w} \\ &= \beta_1\bar{b}_1 + \beta_2\bar{b}_2 + \beta_3\bar{b}_3 + \cdots + \beta_m\bar{b}_m \end{aligned}$$

Por lo tanto, cada elemento de la base A puede expresarme de esa misma manera; es decir

$$\begin{aligned} T(\bar{a}_1) &= \beta_{11}\bar{b}_1 + \beta_{12}\bar{b}_2 + \beta_{13}\bar{b}_3 + \cdots + \beta_{1m}\bar{b}_m \\ T(\bar{a}_2) &= \beta_{21}\bar{b}_1 + \beta_{22}\bar{b}_2 + \beta_{23}\bar{b}_3 + \cdots + \beta_{2m}\bar{b}_m \\ T(\bar{a}_3) &= \beta_{31}\bar{b}_1 + \beta_{32}\bar{b}_2 + \beta_{33}\bar{b}_3 + \cdots + \beta_{3m}\bar{b}_m \\ &\vdots \\ T(\bar{a}_n) &= \beta_{n1}\bar{b}_1 + \beta_{n2}\bar{b}_2 + \beta_{n3}\bar{b}_3 + \cdots + \beta_{nm}\bar{b}_m \end{aligned}$$

De esta forma se obtienen los vectores de coordenadas de $T(\bar{a}_i)$ en la base B:

$$[T(\bar{a}_1)]_B = \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \vdots \\ \beta_{1m} \end{pmatrix}, \quad [T(\bar{a}_2)]_B = \begin{pmatrix} \beta_{21} \\ \beta_{22} \\ \vdots \\ \beta_{2m} \end{pmatrix}, \quad [T(\bar{a}_3)]_B = \begin{pmatrix} \beta_{31} \\ \beta_{32} \\ \vdots \\ \beta_{3m} \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad [T(\bar{a}_n)]_B = \begin{pmatrix} \beta_{n1} \\ \beta_{n2} \\ \vdots \\ \beta_{nm} \end{pmatrix}$$

Utilizando el concepto de matriz de transición presentado en el capítulo anterior, estos vectores de coordenadas forman una matriz; dicha matriz se conoce como la matriz asociada a la transformación T referida a las bases A y B.

$$M_B^A(T) = \left([T(\bar{a}_1)]_B \quad [T(\bar{a}_2)]_B \quad [T(\bar{a}_3)]_B \quad \cdots \quad [T(\bar{a}_n)]_B\right)$$

Esta matriz referida a esas bases es única para T, y permite establecer

$$[T(\bar{v})]_B = M_B^A(T)[\bar{v}]_A$$

EJEMPLO 3.15. Sean $P_2 = \{ax^2 + bx + c | a, b, c \in \mathbb{R}\}$ y $P_3 = \{ax^3 + bx^2 + cx + d | a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ dos espacios vectoriales sobre el campo de los reales; y sea la transformación lineal $D: P_3 \to P_2$, definida por

$$D(ax^3+bx^2+cx+d)=\frac{d}{dx}(ax^3+bx^2+cx+d)$$

a. Obténgase la matriz asociada a D referida a la base $B=\{x^3-x,x^2+1,-x^3-1,x^2+x\}$ del dominio y la base $C=\{2x^2-2,-x-1,-2x^2+x+1\}$ del codominio.

b. Utilícese la matriz para obtener la transformación de $\bar{q}=-x^3+2x^2-x+3$, y compruébese mediante la regla de correspondencia.

Lo primero que debe realizarse es obtener la imagen de los elemento de B bajo D.

$$\begin{aligned} D(x^3-x)&=3x^2-1\\ D(x^2+1)&=2x\\ D(-x^3-1)&=-3x^2\\ D(x^2+x)&=2x+1 \end{aligned}$$

Ahora se procederá a obtener los vectores de coordenadas en la base C de cada una de las imágenes obtenidas.

$$\begin{aligned} 3x^2-1&=\alpha_1(2x^2-2)+\alpha_2(-x-1)+\alpha_3(-2x^2+x+1)\\ 2x&=\beta_1(2x^2-2)+\beta_2(-x-1)+\beta_3(-2x^2+x+1)\\ -3x^2&=\gamma_1(2x^2-2)+\gamma_2(-x-1)+\gamma_3(-2x^2+x+1)\\ 2x+1&=\delta_1(2x^2-2)+\delta_2(-x-1)+\delta_3(-2x^2+x+1) \end{aligned}$$

Por lo que los resultados de resolver los sistemas de ecuaciones correspondientes son

$$[3x^2-1]_C=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\-1\end{pmatrix},\qquad [2x]_C=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\qquad [-3x^2]_C=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix},\qquad [2x+1]_C=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$$

Entonces la matriz buscada es

$$M_C^B(D)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2}\\ -1 & -1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2}\\ -1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Con lo que se concluye el inciso a.

Para obtener la transformación del vector $\bar{q}=-x^3+2x^2-x+3$ se utilizará la ecuación

$$[D(\bar{q})]_C=M_C^B(D)[\bar{q}]_B$$

Por lo que

$$\omega_1(x^3-x)+\omega_2(x^2+1)+\omega_3(-x^3-1)+\omega_4(x^2+x)=-x^3+2x^2-x+3$$

Se registra que el vector de coordenadas es $[\bar{q}]_B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\7\\1\\-3\end{pmatrix}$. Entonces, se puede realizar la operación matricial

$$[D(\bar{q})]_C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Finalmente, para obtener la imagen buscada se realiza una combinación lineal con $[D(\bar{q})]_C$ y los vectores de la base C:

$$\left(\frac{5}{2}\right)(2x^2-2)+(0)(-x-1)+(4)(-2x^2+x+1) = -3x^2+4x-1$$

Al aplicar directamente la regla de asignación sobre el polinomio se tiene

$$\frac{d}{dx}(-x^3+2x^2-x+3) = -3x^2+4x-1$$

Que es el mismo resultado obtenido con anterioridad. Con esto, se concluye satisfactoriamente el inciso b.

EJEMPLO 3.16. Dados el espacio vectorial $V=\{(a,b)|a,b\in\mathbb{R}\}$, y la transformación lineal $H: V\to V$. Se debe encontrar la regla de correspondencia de dicha transformación, utilizando las bases $A=\{(1,2),(-2,0)\}$ y $B=\{(-1,0),(-1,-1)\}$, sabiendo que

$$H(1,2) = (-\cos 45°, 3\cos 45°)$$
$$H(-2,0) = (-2\cos 45°, -2\cos 45°)$$

Sabiendo las transformaciones de los respectivos vectores, se puede la matriz asociada a la transformación referida a las bases A y B:

$$(-\cos 45°, 3\cos 45°) = \alpha_1(-1,0)+\alpha_2(-1,-1)$$
$$(-2\cos 45°, -2\cos 45°) = \beta_1(-1,0)+\beta_2(-1,-1)$$

De donde se obtiene la matriz asociada

$$M_B^A(H) = \begin{pmatrix} 4\cos 45° & 0 \\ -3\cos 45° & 2\cos 45° \end{pmatrix}$$

Una vez obtenida la matriz asociada, se debe utilizar el vector genérico del espacio vectorial para calcular la regla de correspondencia. El problema sería muy sencillo si las bases de referencia fuesen canónicas: sólo se multiplicaría la matriz asociada por el vector transpuesto, y se obtendría la regla de correspondencia. Este ejemplo contempla bases que no son canónicas; entonces, se debe recurrir al vector de coordenadas para resolver el problema.

$$(a,b) = \gamma_1(1,2)+\gamma_2(-2,0)$$

Se obtiene que $[(a,b)]_A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2b \\ -2a+b \end{pmatrix}$; utilizando este vector de coordenadas se establece que

$$[H(a,b)]_B^T = \begin{pmatrix} 4\cos 45° & 0 \\ -3\cos 45° & 2\cos 45° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{2b}{4} \\ \dfrac{-2a+b}{4} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2b\cos 45° \\ -a\cos 45° - b\cos 45° \end{pmatrix}$$

Por lo que la regla de correspondencia se obtiene de la siguiente combinación lineal:

$$(2b\cos 45°)(-1,0) + (-a\cos 45° - b\cos 45°)(-1,-1) = H(a,b)$$
$$(a\cos 45° - b\cos 45°\,, a\cos 45° + b\cos 45°) =$$

Que es la regla de correspondencia buscada.

Un caso interesante es la transformación identidad, establecida como $I\colon V \to V$. Se puede establecer que la matriz asociada está referida únicamente a una base, en vista que la transformación trabaja en el mismo espacio vectorial. De forma general, se toma por conveniencia la base canónica, a menos que se especifique lo contrario.

Como sólo se trabaja con una base, y la transformación identidad no afecta a los vectores, es inmediato suponer que la matriz asociada debe poseer esa característica: no afectar a los vectores de coordenadas que se obtienen. Es entonces que se deduce que la matriz asociada a la transformación identidad es la matriz identidad.

EJEMPLO 3.17. Sea la transformación identidad $I\colon V \to V$ y $B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3, \dots, \bar{b}_n\}$ una base del espacio vectorial V. Al aplicar la transformación identidad a la base se obtendrá

$$I(\bar{b}_1) = \bar{b}_1 \Rightarrow [I(\bar{b}_1)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad I(\bar{b}_2) = \bar{b}_2 \Rightarrow [I(\bar{b}_2)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad I(\bar{b}_n) = \bar{b}_n \Rightarrow [I(\bar{b}_1)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que al formar la matriz asociada a la transformación se tiene

$$M_B^B(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Que es la matriz identidad.

Álgebra de las transformaciones lineales

Las transformaciones lineales también tienen definidas operaciones entre ellas; más específicamente, la suma de transformaciones y la multiplicación por un escalar, que son las operaciones básicas en los espacios vectoriales.

Por medio de las operaciones se pueden combinar diversas transformaciones lineales, y así obtener nuevas transformaciones.

Definición y propiedades de la adición

Sean $F: V \to W$ y $G: V \to W$ dos transformaciones lineales entre espacios vectoriales sobre el mismo campo. Se define a la suma de transformaciones lineales $F + G$ como la transformación denotada por

$$(F + G)(\bar{v}) = F(\bar{v}) + G(\bar{v})$$

Dos propiedades importantes de esta operación son:

- ✓ Si F y G son lineales, entonces $F + G$ también es lineal.
- ✓ $M_B^A(F + G) = M_B^A(F) + M_B^A(G)$.

Definición y propiedades de la multiplicación por un escalar

Sean $F: V \to W$ una transformación lineal entre espacio vectoriales sobre el campo K, y un escalar $\alpha \in K$. Se define a la multiplicación de una transformación lineal por un escalar αF como la transformación denotada por

$$(\alpha F)(\bar{v}) = \alpha[F(\bar{v})]$$

Sus propiedades son:

- ✓ Si F es lineal, entonces αF también es lineal
- ✓ $M_B^A(\alpha F) = \alpha M_B^A(F)$.

EJEMPLO 3.18. Sean las transformaciones $R: P_2 \to \mathbb{R}^2$ y $S: P_2 \to \mathbb{R}^2$, definidas por

$$\begin{aligned} R(ax^2 + bx + c) &= (2a, b + c) \\ S(ax^2 + bx + c) &= (a - c, b) \end{aligned}$$

Se desea obtener la transformación $3R - 2S$, así como su matriz asociada a las bases canónicas. Para realizarlo, basta con obtener el resultado de la operación con las reglas de correspondencia de ambas transformaciones:

$$\begin{aligned} 3R - 2S &= 3(2a, b + c) - 2(a - c, b) \\ &= (6a, 3b + 3c) - (2a - 2c, 2b) \\ (3R - 2S)(ax^2 + bx + c) &= (4a + 2c, b + 3c) \end{aligned}$$

Que es la regla de asignación buscada. La matriz asociada puede obtenerse como sigue:

$$\begin{aligned} R(x^2) &= (2, 0) \\ R(x) &= (0, 1) \\ R(1) &= (0, 1) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} S(x^2) &= (1, 0) \\ S(x) &= (0, 1) \\ S(1) &= (-1, 0) \end{aligned}$$

Cuyas respectivas matrices asociadas son:

$$M(R) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$M(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para encontrar la matriz buscada, sólo se realizan las siguientes operaciones según las propiedades de las operaciones entre las transformaciones lineales:

$$3M(R) - 2M(S) = M(3R - 2S)$$

$$3\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Si se toma la base canónica y se utiliza la regla de correspondencia de la transformación $3R - 2S$, se tiene que

$$(3R - 2S)(x^2) = (4, 0)$$

$$(3R - 2S)(x) = (0, 1)$$

$$(3R - 2S)(1) = (2, 3)$$

Y la matriz asociada es

$$M(3R - 2S) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Que es la matriz que se obtuvo anteriormente.

Puede observarse que no importa cuál sea el método para calcular la matriz, siempre se llegará al mismo resultado; esto se debe a que la matriz asociada a una transformación es única.

Definición y propiedades de la composición de transformaciones

Una de las operaciones más interesantes dentro de las transformaciones lineales (y del estudio de las funciones en general) es la composición de funciones. En general, la composición de transformaciones se comporta de la misma forma que la composición de funciones reales de variable real; la diferencia radica en la utilización de matrices asociadas para calcular la transformación composición.

Sean U, V y W tres espacios vectoriales sobre el campo K, y $F: U \to V$ y $G: V \to W$ dos transformaciones lineales. La función composición $G \circ F$ se define como

$$(G \circ F)(\bar{u}) = G\big(F(\bar{u})\big)$$

Es decir, la composición es una transformación evaluada con otra transformación. La figura 3.2 muestra la relación entre los espacios involucrados; se puede observar que en la composición se obtiene la imagen de un vector bajo una transformación por medio de otra transformación.

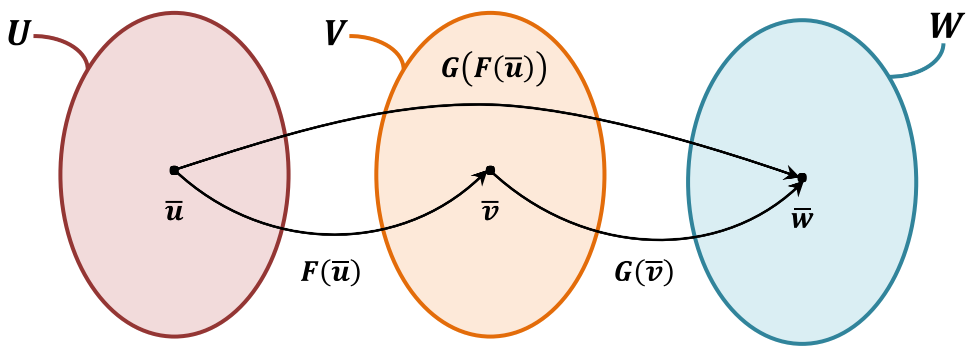

Figura 3.2. Composición de transformaciones lineales.

Las propiedades de la composición de funciones son:

- ✓ Si F y G son lineales, entonces $G \circ F$ también es lineal.
- ✓ $H \circ (F + G) = (H \circ F) + (H \circ G)$.
- ✓ $(H + E) \circ F = (H \circ F) + (E \circ F)$.
- ✓ $\alpha(H \circ F) = (\alpha H) \circ F \Rightarrow H \circ (\alpha F)$.
- ✓ $D \circ (H \circ F) = (D \circ H) \circ F$.
- ✓ $E \circ I_V = E$ y $I_W \circ E = E$; donde I_V es la transformación identidad en el dominio de E, e I_W es la transformación identidad en el codominio de E.
- ✓ $M_C^A(G \circ F) = M_C^B(G) M_B^A(F)$.

EJEMPLO 3.19. Sean los espacios vectoriales $\mathbb{R}^3$, V y $\mathbb{R}^4$, donde

$$V = \{ax^3 + bx | a, b \in \mathbb{R}\}$$

y las transformaciones lineales $X: \mathbb{R}^3 \to V$ y $Y: V \to \mathbb{R}^4$ definidas por

$$X(a, b, c) = -bx^3 + (a - c)x$$

$$Y(ax^3 + bx) = (a, -a, b, -b)$$

Para obtener la transformación $Y \circ X$ simplemente se sustituye la regla de correspondencia de X en la regla de Y, como sigue

$$\begin{aligned}(Y \circ X)(a, b, c) &= Y\big(X(a, b, c)\big) \\ &= Y(-bx^3 + (a - c)x) \\ &= (-b, b, a - c, -a + c)\end{aligned}$$

Para comprobar que el resultado es correcto, se utilizará las matrices asociadas para encontrar la regla de correspondencia; las bases con las que se trabajará serán las bases canónicas, para simplificar el cálculo.

Para la matriz $M(X)$:

$$\begin{aligned}X(1, 0, 0) &= x \\ X(0, 1, 0) &= -x^3 \\ X(0, 0, 1) &= -x\end{aligned}$$

y los vectores de coordenadas, referidos a la base canónica de V, de cada imagen son $[x]=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $[-x^3]=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ y $[-x]=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$; por lo tanto, la matriz asociada a X es

$$M(X)=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Para la matriz $M(Y)$:

$$Y(x^3)=(1,-1,0,0)$$

$$Y(x)=(0,0,1,-1)$$

En este caso, los vectores de coordenadas con respecto a la base canónica del espacio $\mathbb{R}^4$ son $[x^3]=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$ y $[x]=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$; y la matriz asociada a Y es

$$M(Y)=\begin{pmatrix}1 & 0\\-1 & 0\\0 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}$$

Para obtener la matriz de la transformación $Y\circ X$, simplemente se realiza la multiplicación de las matrices.

$$\begin{aligned}M(Y\circ X)&=M(Y)M(X)\\&=\begin{pmatrix}1 & 0\\-1 & 0\\0 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}\\M(Y\circ X)&=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & -1\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

La multiplicación de matrices es compatible; por lo tanto, la operación de composición hecha es correcta. Para obtener la regla de correspondencia, se utilizará la transformación del vector genérico transpuesto de $\mathbb{R}^3$ premultiplicado por la matriz asociada; recuérdese que este procedimiento es correcto debido a que tenemos una transformación del tipo $\mathbb{R}^n$ hacia $\mathbb{R}^m$.

$$[(Y\circ X)(a,b,c)]=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & -1\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-b\\b\\a-c\\-a+c\end{pmatrix}$$

Por lo que la regla de correspondencia es $(Y\circ X)(a,b,c)=(-b,b,a-c,-a+c)$, comprobando que se obtiene el mismo resultado que mediante la manipulación de reglas de correspondencia.

La inversa de una transformación lineal

La propiedad $E \circ I = E$ de la composición de transformaciones lineales plantea la posibilidad de encontrar una transformación tal que $X \circ E = I$; esto quiere decir que para la operación de composición es posible establecer una transformación lineal inversa.

El planteamiento de la transformación inversa permite establecer problemas en los cuales se desea encontrar un vector cualquier, cuya imagen es conocida. También debe considerarse la relación que existe entre las matrices asociadas a las transformaciones y las transformaciones inversas; estos conceptos se tocaron de manera breve en el apartado de isomorfismos.

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Se llama inversa de T a la transformación $T^{-1}: W \to V$ tal que se cumple

- ✓ $T^{-1} \circ T = I_V$
- ✓ $T \circ T^{-1} = I_W$

La figura 3.3 muestra la relación entre una transformación lineal y su inversa. Al igual que en el Cálculo, la relación que existe entre la función inversa y la composiciones de funciones es análoga a la que se estudia en este capítulo; aquí se hace la extensión hacia las matrices asociadas a las transformaciones lineales.

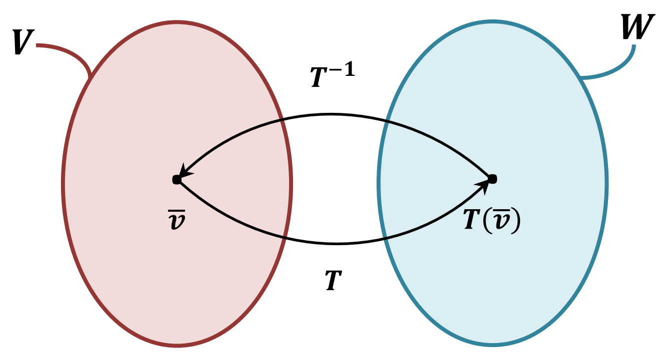

Figura 3.3. Transformación lineal inversa.

Dentro de las propiedades de la transformación inversa se encuentran:

- ✓ Si T es lineal, entonces T^{-1} (si existe) también es lineal.
- ✓ T^{-1} existe, si $M_B^A(T)$ es no-singular.
- ✓ T^{-1} es única.
- ✓ $(T^{-1})^{-1} = T$.
- ✓ $(T \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ T^{-1}$.
- ✓ $(\alpha T)^{-1} = \alpha^{-1} T^{-1}$; siendo $\alpha \neq 0 \in K$, que es el campo donde se define la transformación.
- ✓ $M_A^B(T^{-1}) = [M_B^A(T)]^{-1}$.

También se cumplen las siguientes propiedades:

- ✓ Si T es inyectiva y suprayectiva, entonces T^{-1} existe.
- ✓ T^{-1} existe, si $\dim V = \dim W$ y $N(T) = \{\bar{0}_V\}$.

Estas dos propiedades son las correspondientes a un isomorfismo; por ello se habló de que el isomorfismo es una transformación lineal no-singular. En conclusión, cualquier transformación inversa es un isomorfismo.

EJEMPLO 3.20. Se desea determinar cuál de las siguientes transformaciones tiene inversa:

$$S(x,y,x)=\begin{pmatrix}2x & 0 & 0\\ 0 & 4x-y & 0\\ 0 & 0 & 2x+3y-z\end{pmatrix}$$
$$T(ax+b)=(2a+4b,3a+6b)$$

Para cada uno de los casos se puede comprobar las propiedades de transformación inyectiva, suprayectiva, núcleo y dimensiones; sin embargo, una manera más sencilla de realizar esta comprobación es por medio de las matrices asociadas. En ningún momento se establece el uso de dos bases en particular, así que se realizarán los cálculos con las bases canónicas.

Para la transformación S:

$$S(1,0,0)=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$
$$S(0,1,0)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$
$$S(0,0,1)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Al realizar la combinación lineal de las imágenes con la base natural del espacio vectorial de las matrices diagonales de orden tres se obtienen los respectivos vectores de coordenadas, y la matriz asociada es

$$M(S)=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 4 & -1 & 0\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

Para saber si la matriz tiene inversa se calcula su determinante: $\det M(S)=2$; por lo tanto, la matriz es no-singular y existe la transformación S^{-1}. Para saber la regla de correspondencia, se invertirá la matriz y se utilizarán los vectores de coordenadas.

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0\\ 4 & -1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0\\ 2 & 3 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 & -1 & 0\\ 0 & -3 & 1 & \vdots & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 7 & -3 & -1\end{pmatrix}$$

En este caso, se intercambia el dominio y el codominio, puesto que se está trabajando con la transformación inversa. Los vectores de coordenadas se obtienen a partir de

$$\begin{pmatrix}x & 0 & 0\\ 0 & y & 0\\ 0 & 0 & z\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Donde $\alpha_1=x$, $\alpha_2=y$ y $\alpha_3=z$; entonces se aplica la transformación

$$\left[S^{-1}\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ 2x - y \\ 7x - 3y - z \end{pmatrix}$$

y la regla de correspondencia se obtiene de la combinación lineal

$$\left(\frac{1}{2}x\right)(1,0,0) + (2x - y)(0,1,0) + (7x - 3y - z)(0,0,1) = \left(\frac{1}{2}x, 2x - y, 7x - 3y - z\right)$$

Por lo que la regla de correspondencia es

$$S^{-1}\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}x, 2x - y, 7x - 3y - z\right)$$

Para la transformación T:

$$T(x) = (2,3)$$
$$T(1) = (4,6)$$

Se tiene la matriz asociada

$$M(T) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Se puede observar directamente que una columna es múltiplo de la otra; se comprueba entonces, que el determinante de la matriz es igual a cero, y como consecuencia, la transformación T^{-1} no existe.

Una de las aplicaciones más importantes de las operaciones entre transformaciones lineales son las ecuaciones que pueden plantearse. Por ejemplo, se puede establecer la siguiente ecuación:

$$(H \circ S) + (3T - 4S) = X \circ S - X$$

Donde se debe encontrar la regla de correspondencia de la transformación X. Si se sustituyen las transformaciones por sus respectivas matrices asociadas se obtendría una ecuación de la siguiente forma:

$$M(H)M(S) + M(3T) + M(-4S) = M(X)M(S) - M(X)$$

Que es una ecuación matricial, cuyo método de resolución se estudió en el tema de Matrices y determinantes.

EJEMPLO 3.21. Dadas las transformaciones

$$Q: P_2 \to P_2 \Rightarrow Q(ax^2 + bx + c) = (a + b - c)x^2 + (a + b)x + (b + c)$$
$$R: P_1 \to P_2 \Rightarrow R(bx + c) = (b + c)x^2 + bx + (b + 3c)$$
$$S: P_2 \to P_1 \Rightarrow S(ax^2 + bx + c) = (a + b)x + (a + c)$$

Obténgase la regla de correspondencia de la transformación lineal X, si

$$3R \circ S + Q \circ X = Q$$

La ecuación puede escribirse a términos de matrices asociadas:

$$\begin{aligned} M(3R)M(S) + M(Q)M(X) &= M(Q) \\ M(Q)M(X) &= M(Q) - M(3R)M(S) \\ M(X) &= [M(Q)]^{-1}[M(Q) - M(3R)M(S)] \end{aligned}$$

Por lo que cada transformación encuentra a su matriz asociada como sigue:

$$M(3R) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 0 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad M(S) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que la matriz faltante es la inversa de $M(Q)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[M(Q)]^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que la ecuación queda como

$$\begin{aligned} M(X) &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 0 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 12 & 3 & 9 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -2 & -4 \\ -2 & -2 & 0 \\ -12 & -2 & -8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 13 & 0 & 12 \\ -15 & -2 & -12 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente, como se define $X: P_2 \to P_2$, se tiene que la regla de correspondencia será:

$$X(ax^2 + bx + c) = (13a + 12b)x^2 - (15a + 2b - 12c)x + (3a + 4c)$$

Efectos geométricos de las transformaciones lineales

Las transformaciones lineales permiten establecer el comportamiento geométrico de los puntos de un sistema coordenado; una vez que se sabe donde esta ese punto, se lo puede representar como un vector, que dependiendo de la transformación lineal que se le aplique, podrá convertirse en otro punto, o permanecer inalterable.

Estos aspectos nos permiten establecer algoritmos para representar imágenes por medio de una computadora; e incluso, permitir que dichas imágenes se agrupen en fotomontajes y animaciones.

En computación gráfica, se utilizan las transformaciones lineales para realizar cálculos en los cuales un punto de la pantalla podrá trasladarse a diferentes posiciones, o bien cambiar de color, o aumentar su brillo. A continuación se exponen algunos ejemplos del uso de las transformaciones lineales en aspectos geométricos involucrados en el procesamiento digital de imágenes.

EJEMPLO 3.22. Sea la imagen de la figura 3.4.

Figura 3.4. Imagen digital que se puede generar por medio de una transformación lineal.

Esta imagen puede presentarse como un sistema coordenado, en el cual el punto inferior del corazón sería el origen. Tomando en consideración que la imagen es simétrica, se puede establecer un algoritmo de compresión, en el cual sólo se almacenen dos factores: la mitad de la imagen y una transformación lineal.

Se tomará el lado derecho y por medio de una transformación lineal se generará el lado izquierdo; cada punto de la imagen se representará por medio de un vector. Al aplicar la transformación a cada vector se obtiene una reflexión de los puntos sobre el eje y (véase la figura 3.5), lo cual permitirá establecer una imagen simétrica, y completa, en la pantalla del ordenador.

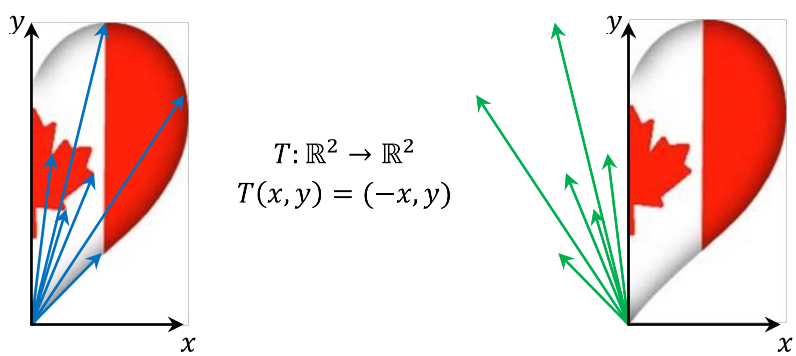

Figura 3.5. Generación de la parte izquierda de la imagen estudiada a partir de la parte derecha y la transformación lineal T.

Finalmente, la unión de los puntos ya almacenados en el archivo de imagen, y el conjunto de vectores resultantes de aplicar la transformación nos dará la imagen completa (figura 3.6). Este tipo de manipulación con imágenes se denomina reflexión, ya que se establece un eje o curva sobre el cual los puntos serán reflejados. Esto permite manipular información de una manera más eficiente, ya que con la mitad de datos conocidos, se obtendrá un resultado completo, dejando de lado los costos de almacenamiento que implica el manejo de una gran cantidad de datos, en este caso, de una imagen digitalizada.

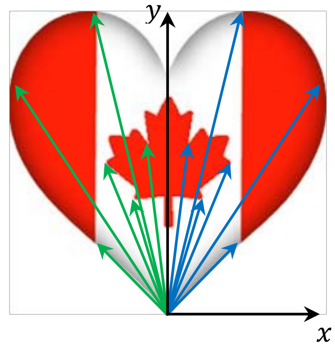

Figura 3.6. Imagen generada mostrada en la pantalla del ordenador.

Sin embargo, la reflexión no es el único efecto geométrico que se tiene; la rotación y la reflexión central son importantes también.

EJEMPLO 3.23. Sean las imágenes de la figura 3.7.

Figura 3.7. Imágenes de la Cruz de Hierro Alemana, y el planeta Saturno.

Para el caso de la imagen de la Cruz de Hierro, es posible aplicar una transformación que permita establecer una simetría central, en la cual al aplicar una transformación a un vector se obtendrá su simétrico con respecto al origen. La figura 3.8 muestra ese efecto realizado con la transformación lineal $S(x, y) = (-x, -y)$.

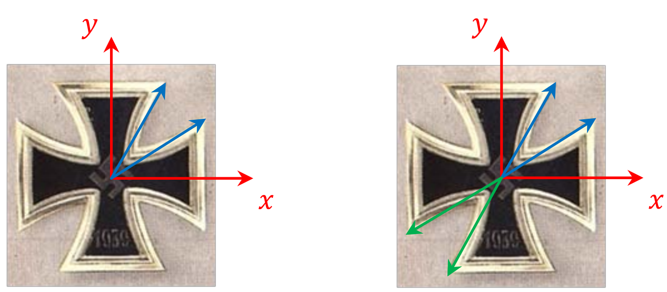

Figura 3.8. Generación de la imagen a partir de la transformación S; en azul los vectores originales, en verde los vectores transformados en su simétrico con respecto al origen.

Para la imagen de Saturno, es posible utilizar una transformación lineal que permita a un punto contenido en uno de sus anillos rotar un determinado ángulo φ; así, se formará un todo el anillo, a partir de un solo punto. La transformación se aplicaría sobre un plano XY, que estaría superpuesto al plano imaginario que contiene los anillos. La figura 3.9 muestra esta explicación.

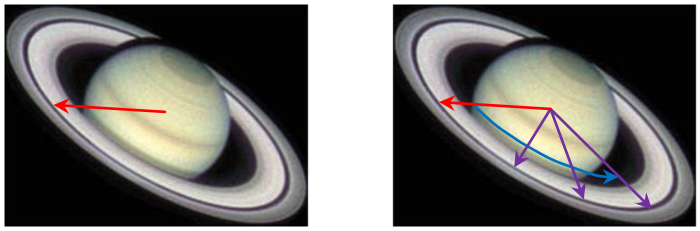

Figura 3.9. Se muestra como a partir del vector en rojo, y al aplicarle una transformación lineal de rotación, se puede generar cualquiera de los vectores en violeta; la línea curva en azul muestra la rotación del vector.

En este caso, la transformación utilizada sería de la forma

$$R(x, y) = (x \cos\varphi - y \operatorname{sen}\varphi\,, x \operatorname{sen}\varphi + y \cos\varphi)$$

lo cual implica una rotación del vector en un determinado ángulo φ.

Existen otros efectos, tales como proyección sobre un plano o escalamiento (cambio de tamaño), los cuales dependen de los puntos con los que se estén trabajando, la magnitud que se desea obtener, e incluso el lugar donde se quiere proyectar (generalmente un subespacio); la figura 3.10, muestra los dos efectos mencionados. Este tipo de efectos, y otros más complicados, incluyen los conceptos de transformaciones lineales, y además de operadores lineales y espacios con producto interno, que son temas que se tratarán más adelante.

Figura 3.10. Representaciones de transformaciones lineales de proyección sobre un subespacio (izquierda) y escalamiento (derecha).

Operador lineal

Como se ha visto, las transformaciones lineales permiten convertir un vector cualquier de un espacio vectorial V en otro vector de un espacio vectorial W. Existe especial interés por las transformaciones lineales que van desde un espacio vectorial hasta el mismo espacio; es decir, transformaciones lineales del tipo $T: V \to V$.

Sea un espacio vectorial V sobre un campo K. Se llama operador lineal o transformación lineal en V a la transformación definida por

$$T: V \to V$$

Dado un operador se lineal, se deduce que la transformación de un vector $\bar{u} \in V$ es otro vector $\bar{v} \in V$:

$$T(\bar{u}) = \bar{v}$$

Dentro de este tipo de transformaciones existe la siguiente peculiaridad: el vector $\bar{v}$ puede ser linealmente dependiente del vector $\bar{u}$; es decir, al multiplicar $\bar{u}$ por un escalar se obtiene $\bar{v}$:

$$T(\bar{u}) = \lambda\bar{u}$$

EJEMPLO 3.24. Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y el operador lineal $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$T(x, y) = (2x + y, 6x + y)$$

Si se aplica el operador lineal a los vectores $\bar{v} = (-1, 1)$ y $\bar{u} = (1, 2)$ se tiene que

$$\begin{aligned} T(-1, 1) &= (-1, -5) \\ T(1, 2) &= (4, 8) \end{aligned}$$

Para el caso del vector $\bar{u}$ se observa que al aplicarle la transformación se realiza una multiplicación del vector por un escalar; o sea,

$$\begin{aligned} T(1, 2) &= (4, 8) \\ &= 4(1, 2) \end{aligned}$$

Si además, se transforma al vector $\bar{w} = (1, -3)$ se obtiene $T(1, -3) = (-1, 3)$; de donde se deduce

$$\begin{aligned} T(1, -3) &= (-1, 3) \\ &= -1(1, -3) \end{aligned}$$

Este tipo de particularidades dentro de los operadores lineales se conocen como **valores** y **vectores propios**.

Definición y propiedades de valores y vectores propios de un operador lineal

Sean V un espacio vectorial sobre un campo K y un operador lineal $T: V \to V$. En la relación

$$T(\bar{v}) = \lambda\bar{v}, \qquad \forall\, \lambda \in K, \forall\, \bar{v} \neq \bar{0} \in V$$

A λ se le conoce como valor propio, y a $\bar{v}$ como vector propio, ambos del operador lineal T; estos elementos también son conocidos como valores y vectores característicos.

Los términos provienen del alemán, *Eigenwerte* [valores propios] y *Eigenvektoren* [vectores propios]; es incorrecto utilizar ‘eigenvectores’ y ‘eigenvalores’, ya que no son reconocidas por la Real Academia de la Lengua Española.

EJEMPLO 3.25. Sea el espacio vectorial

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle|\, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

y el operador lineal $T: M_2 \to M_2$ definido por

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + d & b \\ -b & c - d \end{pmatrix}$$

Para este caso, se puede establecer que las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

son vectores propios para el valor propio $\lambda = 1$:

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+0 & 0 \\ -0 & 0-0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (1)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Los valores y vectores propios presentan algunas particularidades para casos especiales de operadores lineales.

- ✓ Para la transformación identidad $I: V \to V$ se establece que todos los vectores no nulos de V son vectores propios del valor 1.
- ✓ La transformación nula $O: V \to V$ establece que todos los vectores propios no nulos de V son vectores propios del valor 0.
- ✓ Una característica importante de los operadores lineales dicta que todos los vectores no nulos del núcleo son vectores característicos del valor 0.
- ✓ Si se define un operador lineal T en un espacio vectorial V sobre un campo K. Si $\bar{v}$ es un vector propio de T correspondiente al valor propio λ, entonces
  1. El escalar λ es único para ese vector.
  2. El vector $\alpha\bar{v}$ es un vector propio correspondiente a λ, si $\alpha \neq 0 \in K$.
  3. Si $\bar{u} \neq -\bar{v}$ es un vector propio de T correspondiente a λ, entonces $\bar{u} + \bar{v}$ también es un vector propio correspondiente a λ.

Obsérvese que esta última propiedad establece los principios fundamentales del Álgebra Lineal: suma de vectores y multiplicación de un vector por un escalar. Este concepto es importante, ya que se presentan dos de las tres características de un subespacio vectorial.

Definición de espacios propios

Los valores y vectores propios pueden establecer subespacios. Si a todos los vectores propios correspondientes a un valor propio específico se le añade el vector nulo, se formará un subespacio vectorial conocido como espacio propio.

> Si $T: V \to V$ es un operador lineal y λ es un valor característico de T, entonces el conjunto
>
> $$E(\lambda) = \{\bar{v} \mid \bar{v} \in V, T(\bar{v}) = \lambda\bar{v}\}$$
>
> se llama espacio característico de T correspondiente al valor λ.

Debido a las propiedades mencionadas de los vectores propios, se considera que el espacio propio es invariante porque $\forall\ \bar{v} \in E(\lambda)$ se tiene que $T(\bar{v}) \in E(\lambda)$.

Caso de dimensión finita: polinomio característico, obtención de valores y vectores propios

Una de las interrogantes que surgen al momento de definir a los valores y vectores propios es: dado un operador lineal, ¿cómo pueden obtenerse sus valores y vectores propios?

La forma de calcularlos reúne las bases de la matriz asociada a una transformación lineal, el álgebra de matrices y el cálculo de raíces de polinomios; es una manera rápida y sencilla de calcular los valores característicos de cualquier operador lineal; incluso puede extenderse a una matriz cualquiera, no importando si está asociada o no a un operador lineal.

Se sabe que en un operador lineal de un espacio vectorial V, los valores y vectores característicos se definen como:

$$T(\bar{v}) = \lambda\bar{v} \dots (1)$$

El operador posee una matriz asociada, la cual puede referirse a dos bases de V diferentes; por defecto, se le asocia a una sola base B. Esto establece la definición

$$[T(\bar{v})]_B = M_B^B(T)[\bar{v}]_B \dots (2)$$

Se puede sustituir la expresión (1) en (2), llegando a

$$[\lambda\bar{v}]_B = M_B^B(T)[\bar{v}]_B$$

Esta ecuación matricial puede reescribirse sucesivamente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
[\lambda\bar{v}]_B - M_B^B(T)[\bar{v}]_B &= \bar{0}\\
\lambda[\bar{v}]_B - M_B^B(T)[\bar{v}]_B &=\\
\lambda I[\bar{v}]_B - M_B^B(T)[\bar{v}]_B &=\\
[\lambda I - M_B^B(T)][\bar{v}]_B &=
\end{aligned}$$

Se llega entonces a un sistema de ecuaciones lineales homogéneo. Dicho sistema presenta la característica de que su matriz de coeficientes será de la siguiente forma:

$$\lambda\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} = \lambda I - M_B^B(T)$$

$$\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}\lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn}\end{pmatrix} = \lambda I - M_B^B(T)$$

Para que esta matriz de coeficientes del SELH obtenido sea compatible determinado (sólo acepte a la solución trivial), su determinante debe ser diferente de cero; por el contrario, sea compatible indeterminado, su determinante debe ser igual a cero. Tomando en cuenta esta situación, y sabiendo que el vector nulo no es un vector característico, el determinante de la matriz $\lambda I - M$ debe ser igual a cero.

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

$$\det \lambda I - M =$$

Al calcular el determinante, se obtendrá un polinomio de grado igual al orden de la matriz; dicho polinomio se llama polinomio propio o ecuación propia. Las raíces del polinomio propio son los valores propios buscados.

EJEMPLO 3.26. Sea el operador lineal $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow T(x, y) = (2x + y, 6x + y)$, definido en el ejemplo 3.24. Su matriz asociada referida a la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es

$$M(T) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se utiliza la ecuación $\det \lambda I - M = 0$ para determinar los valores característicos.

$$\det \left[\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\det \left[\begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -6 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$[(\lambda - 2)(\lambda - 1)] - [(-6)(-1)] =$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2\lambda + 2 - 6 =$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 =$$

De donde se observa que las raíces del polinomio son $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = -1$, que son los valores propios mencionados en el ejemplo 3.24.

Una vez obtenidos los valores propios se pueden conocer los vectores propios. El procedimiento es el evaluar el SEHL $[\lambda I - M_B^B(T)][\bar{v}]_B = \bar{0}$ con los valores propios conocidos; cada conjunto solución obtenido a partir de un valor propio será el conjunto de vectores propios.

EJEMPLO 3.27. Siguiendo con los vectores propios del operador T, se plantea la ecuación $[\lambda I - M_B^B(T)][\bar{v}]_B = \bar{0}$ con los datos obtenidos; el vector de coordenadas del vector genérico se refiere a la base canónica.

$$\begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -6 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_1 = 4$

$$\begin{matrix} 2x & -y & = & 0 \\ -6x & +3y & = & 0 \end{matrix}$$

Por lo que el conjunto solución son los vectores de la forma $(x, 2x)$; además, en forma de conjunto, este es el espacio propio para $\lambda_1 = 4$:

$$E(\lambda_1) = \{(x, 2x) | x \in \mathbb{R}\}$$

Para $\lambda_2 = -1$

$$\begin{array}{rrcl} -3x & -y & = & 0 \\ -6x & -2y & = & 0 \end{array}$$

Los vectores propios son de la forma $(x, -3x)$; el espacio propio es:

$$E(\lambda_2) = \{(x, -3x) | x \in \mathbb{R}\}$$

EJEMPLO 3.28. Sea el espacio vectorial de las matrices simétricas de orden dos con elementos reales sobre el campo de los reales, donde se define un operador lineal H, cuya matriz asociada es

$$M(H) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular los valores y vectores propios del operador, se plantea

$$\det\left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 1) - (\lambda - 1 + \lambda - 1) =$$

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3) =$$

De donde los valores propios obtenidos son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 3$. Para calcular los espacios propios se debe tomar en cuenta que el espacio vectorial donde se define el operador lineal es

$$V = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$$

Por lo que los espacios característicos deben ser conjuntos de matrices. En este caso, recuérdese que la ecuación $[\lambda I - M_B^B(T)][\bar{v}]_B = \bar{0}$ utiliza el vector de coordenadas, por lo que el procedimiento descrito para obtener los espacios propios arrojará vectores de coordenadas.

Para $\lambda_1 = 0$:

$$\begin{array}{rrrcl} -\alpha_1 & +\alpha_2 & & = & 0 \\ \alpha_1 & -2\alpha_2 & +\alpha_3 & = & 0 \\ & \alpha_2 & -\alpha_3 & = & 0 \end{array}$$

cuyo conjunto solución es $(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1)$. Este es un vector de coordenadas, por lo que para encontrar el espacio propio se debe realizar una combinación lineal con los elementos de la base natural del espacio vectorial:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

y se obtiene que

$$E(\lambda_1)=\left\{\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_1\\ \alpha_1 & \alpha_1\end{pmatrix}\middle|\alpha_1\in\mathbb{R}\right\}$$

Para $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{array}{cccccc} & \alpha_2 & & = & 0\\ \alpha_1 & -\alpha_2 & +\alpha_3 & = & 0\\ & \alpha_2 & & = & 0\end{array}$$

con un conjunto solución de la forma $(\alpha_1, 0, -\alpha_1)$; el espacio propio es

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+(0)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}-\alpha_1\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0\\ 0 & -\alpha_1\end{pmatrix}$$

$$E(\lambda_2)=\left\{\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0\\ 0 & -\alpha_1\end{pmatrix}\middle|\alpha_1\in\mathbb{R}\right\}$$

Para $\lambda_3 = 3$:

$$\begin{array}{cccccc} 2\alpha_1 & +\alpha_2 & & = & 0\\ \alpha_1 & +\alpha_2 & +\alpha_3 & = & 0\\ & \alpha_2 & +2\alpha_3 & = & 0\end{array}$$

con un conjunto solución de la forma $(\alpha_1, -2\alpha_1, \alpha_1)$, cuyo espacio propio es

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}-2\alpha_1\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\alpha_1\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & -2\alpha_1\\ -2\alpha_1 & \alpha_1\end{pmatrix}$$

$$E(\lambda_3)=\left\{\begin{pmatrix}\alpha_1 & -2\alpha_1\\ -2\alpha_1 & \alpha_1\end{pmatrix}\middle|\alpha_1\in\mathbb{R}\right\}$$

Teorema de Cayley-Hamilton

Existe un teorema de particular interés para la ecuación característica de una matriz en particular.

> El teorema de Cayley-Hamilton establece que toda matriz es una raíz de su propio polinomio característico; es decir, si un polinomio propio se escribe como una ecuación matricial, entonces una de sus raíces será la matriz que lo generó.

EJEMPLO 3.29. Se desea verificar el teorema de Cayley-Hamilton para la matriz

$$A=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -5 & 1\end{pmatrix}$$

Primero, se obtiene

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}\lambda+2 & 2\\ 5 & \lambda-1\end{pmatrix}&=0\\ (\lambda+2)(\lambda-1)-10&=\\ \lambda^2+\lambda-12&=\end{aligned}$$

Escribiendo esta ecuación como una ecuación matricial se tiene

$$\Lambda^2 + \Lambda - 12I = O$$

Al evaluar el polinomio propio matricial con la matriz A se tiene

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} - 12\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} =$$

Con lo cual, se satisface el teorema.

También es posible calcular alguna potencia de una matriz utilizando su polinomio propio.

EJEMPLO 3.30. Calcúlese C^3 y C^{-1} para la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se obtiene su polinomio propio

$$\det\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = 0$$
$$(\lambda - 1)^3 - 1 =$$
$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 2 =$$

En términos de matrices se tiene

$$\Lambda^3 - 3\Lambda^2 + 3\Lambda - 2I = O$$

Para calcular C^3, simplemente se despeja el término de tercer orden

$$\Lambda^3 = 3\Lambda^2 - 3\Lambda + 2I$$

$$C^3 = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Para el caso de C^{-1}, a al polinomio propio matricial se le postmultiplica por Λ^{-1}, y se despeja el término de la matriz inversa:

$$\Lambda^3 - 3\Lambda^2 + 3\Lambda - 2I = O$$
$$\Lambda^3\Lambda^{-1} - 3\Lambda^2\Lambda^{-1} + 3\Lambda\Lambda^{-1} - 2I\Lambda^{-1} = O\Lambda^{-1}$$

$$A^2 - 3A + 3I - 2A^{-1} = O$$
$$\frac{1}{2}(A^2 - 3A + 3I) = A^{-1}$$

Finalmente se sustituye la matriz C.

$$\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right] = C^{-1}$$
$$\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3 & 0 & -3\\ -3 & -3 & 0\\ 0 & -3 & -3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\right] =$$
$$\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0 & -3\\ -3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\end{pmatrix}\right] =$$
$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} =$$

Con lo cual termina el cálculo de las matrices pedidas.

Matrices similares y sus propiedades

Una matriz asociada a una transformación lineal tendrá diferentes formas, dependiendo de las bases que se utilicen para calcularla; en forma general, lo mismo sucede con el operador lineal, con la salvedad de que sólo se refieren a una sola base. En este caso las bases canónicas sirven como un auxiliar para simplificar los cálculos y la simpleza de la matriz.

Las matrices más simples con las que puede trabajarse son las matrices diagonales. Aquí surge la interrogante siguiente: ¿es posible calcular una matriz diagonal asociada a un operador lineal, a partir de otra matriz asociada?

La respuesta a la pregunta es sí, pero sólo en algunos casos; no siempre será posible encontrar una representación diagonal de un operador lineal. Para que se cumpla esta condición es necesario verificar la naturaleza del operador y de su matriz asociada.

Sean un espacio vectorial V, un operador lineal $T: V \to V$ y una matriz A asociada a T. La matriz A, de orden n, es diagonalizable si existe una base de V con n vectores propios. En tal caso, la matriz diagonal D (referida a la base mencionada) está dada por

$$D = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

Donde λ_i son los valores propios correspondientes a T.

EJEMPLO 3.31. Sea un operador S definido en un espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, cuya matriz asociada es

$$M(S)=\begin{pmatrix}2 & 3 & 3\\ 0 & 4 & 4\\ 0 & -5 & -5\end{pmatrix}$$

y regla de correspondencia es

$$S(x,y,z)=(2x+3y+3z,4y+4z,-5y-5z)$$

Los valores propios correspondientes son $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$ y $\lambda_3=-1$, y los espacios propios son

$$E(\lambda_1)=\{(0,k,-k)|k\in\mathbb{R}\},\qquad E(\lambda_2)=\{(k,0,0)|k\in\mathbb{R}\},\qquad E(\lambda_3)=\{(k,4k,-5k)|k\in\mathbb{R}\}$$

El siguiente conjunto está formado por los vectores propios

$$B=\{(0,2,-2),(3,0,0),(1,4,-5)\}$$

que puede verificarse es una base, ya que es un conjunto generador linealmente independiente de $\mathbb{R}^3$. Si con esta base se encuentra la matriz asociada al operador se tiene:

$$\begin{aligned}S(0,2,-2)&=(0,0,0)\\ S(3,0,0)&=(6,0,0)\\ S(1,4,-5)&=(-1,-4,5)\end{aligned}$$

por lo que la matriz asociada se obtiene de las combinaciones lineales

$$\begin{aligned}(0)(0,2,-2)+(0)(3,0,0)+(0)(1,4,-5)&=(0,0,0)\\ (0)(0,2,-2)+(2)(3,0,0)+(0)(1,4,-5)&=(6,0,0)\\ (0)(0,2,-2)+(0)(3,0,0)+(-1)(1,4,-5)&=(-1,-4,5)\end{aligned}$$

que es

$$M_B^B(S)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Se confirma la definición dada al inicio de este apartado, el operador lineal tiene una matriz diagonal asociada, que está referida a una base de vectores propios; y esa matriz diagonal, contiene a los valores propios.

La relación entre la matriz $M(S)$ y $M_B^B(S)$ es muy estrecha, y puede extenderse hacia todas las matrices asociadas a un mismo operador lineal. Dicha relación se conoce como similaridad o semejanza.

Se dice que las matrices de orden A y B de orden n son similares, si existe una matriz C invertible tal que

$$\mathrm{CB}=\mathrm{AC}$$

Esta definición conlleva las siguientes propiedades:

- ✓ Dos matrices son similares si representan al mismo operador lineal.
- ✓ Si dos matrices son similares, entonces sus respectivos determinantes son iguales.
- ✓ Dos matrices similares tienen los mismos valores propios, y el mismo polinomio propio.

EJEMPLO 3.32. Para las matrices del ejemplo 3.31, se verificarán las tres propiedades mencionadas.

$$M(S) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \qquad M_B^B(S) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La propiedad se cumple, ya que las dos matrices se obtuvieron a partir de la regla de correspondencia del operador lineal S.

Con respecto a sus determinantes

$$\det M(S) = \det M_B^B(S)$$
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix}$$
$$0 = 0$$

Finalmente, al calcular sus polinomios característicos se tiene que

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 & -3 \\ 0 & \lambda-4 & -4 \\ 0 & 5 & \lambda+5 \end{vmatrix}$$
$$\lambda(\lambda-2)(\lambda+1) = (\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda+5) - 5(-4)(\lambda-2)$$
$$\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda$$

Por lo que se verifica que las dos matrices son similares.

Diagonalización de la matriz asociada a un operador lineal

Para diagonalizar una matriz, es necesario encontrar otra matriz que satisfaga la propiedad de similaridad

$$CD = AC$$

que puede expresarse también como

$$D = C^{-1}AC$$

Para poder resolver esta ecuación es necesario encontrar los valores propios de A. Hay que destacar que dependiendo de la naturaleza de la matriz A, existirá o no su matriz diagonal similar; con el simple hecho de obtener los valores propios no se garantiza la existencia de dicha matriz.

Una vez obtenidos los valores propios, se encuentran los vectores correspondientes y se elige un conjunto a partir de ellos. Si ese conjunto es una base del espacio vectorial en el cual se define el operador, entonces la matriz A es diagonalizable; por el contrario, si el conjunto no es una base, entonces la matriz no puede diagonalizarse.

Finalmente, la matriz C que ayuda en el proceso de diagonalización estará formada por la base de vectores propios dispuestos en columnas.

EJEMPLO 3.33. Se desea encontrar una matriz diagonal similar a

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Primero, se determina el polinomio propio de A

$$\begin{vmatrix} \lambda - 4 & -2 \\ -3 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = p(\lambda)$$
$$(\lambda - 4)(\lambda + 1) - (-2)(-3) =$$
$$\lambda^2 - 3\lambda - 10 =$$

Por lo que los valores propios son $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = -2$.

Para obtener los espacios propios se resuelven los sistemas:

Para $\lambda_1 = 5$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y se tiene $E(\lambda_1) = \{(2y, y) | y \in \mathbb{R}\}$.

Para $\lambda_2 = -2$, $\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y se tiene $E(\lambda_2) = \{(x, -3x) | x \in \mathbb{R}\}$.

Con un vector de cada espacio puede formarse el siguiente conjunto

$$B = \{(2,1), (1,-3)\}$$

Puede verificarse fácilmente que este conjunto es linealmente independiente y además, es generador del espacio vectorial de las parejas ordenadas con elementos reales. Por lo tanto, la matriz A es diagonalizable.

Para realizar dicho proceso se aplica la ecuación

$$D = C^{-1}AC$$

donde C es la matriz formada por la base B encontrada

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Finalmente, se tiene que

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Que es la matriz diagonal buscada, y que es correcta, ya que está formada por los valores propios.

EJEMPLO 3.34. Se desea verificar que si las siguientes matrices asociadas a operadores lineales definidos en $\mathbb{R}^3$ con sus respectivos valores característicos pueden diagonalizarse.

$$K=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}\qquad \lambda_1=1,\lambda_2=2 \text{ y } \lambda_3=2.$$

$$L=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix}\qquad \lambda_1=7,\lambda_2=1 \text{ y } \lambda_3=1.$$

Cada matriz tiene un valor propio repetido; por lo tanto, se tendrán dos espacios propios idénticos. Al obtener los espacios propios se observa lo siguiente:

Para K se obtienen

$$E(\lambda_1)=\{(x,0,2x)|x\in\mathbb{R}\}$$

$$E(\lambda_2,\lambda_3)=\{(x,x,2x)|x\in\mathbb{R}\}$$

y un conjunto linealmente independiente es $\{(1,0,2),(1,1,2)\}$; pero no es una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, por lo que la matriz K no puede diagonalizarse.

Mientras que para L se tienen

$$E(\lambda_1)=\{(x,2x,3x)|x\in\mathbb{R}\}$$

$$E(\lambda_2,\lambda_3)=\{(x,y,-x-y)|x,y\in\mathbb{R}\}$$

El conjunto linealmente independiente que se puede formar es $\{(1,2,3),(1,0,-1),(0,1,-1)\}$, ya que el segundo espacio propio arrojará dos vectores por ser de dimensión dos. Este conjunto es una base de $\mathbb{R}^3$; entonces, la matriz si puede diagonalizarse:

$$\begin{aligned}D&=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & -1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & -1\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 5 & -1 & -1\\ -2 & 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 1 & 0\\ 14 & 0 & 1\\ 21 & -1 & -1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}7 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Puede observarse que habrá ocasiones en las cuales una matriz con valores propios iguales puede o no poseer una matriz diagonal similar; en cambio, si los valores propios son diferentes entre sí, entonces si se asegura que la matriz puede diagonalizarse.