Complemento Ortogonal

Sea el subespacio S. Cuando los elementos de un subespacio vectorial son ortogonales a S, se dice que dicho subespacio es un complemento ortogonal. Se denota como $S^{\perp}$, y se denomina complemento porque la suma de las dimensiones de S y $S^{\perp}$ es igual a la dimensión del espacio vectorial.

EJEMPLO. Dado el subespacio vectorial $N=\left\{\begin{pmatrix} a & -a \\ a & c \end{pmatrix} \middle| a,c\in\mathbb{R}\right\}$ su complemento ortogonal con respecto al producto interno

$$\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$$

en el espacio vectorial de matrices cuadradas de orden dos será aquél subespacio cuyos vectores sean perpendiculares a cualquier base de N. Entonces, tomando la base arbitraria $B=\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ y aplicando la restricción de ortogonalidad con un vector genérico del espacio vectorial:

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \right\rangle &= 0 \\ &= \mathrm{tr}\begin{pmatrix} w-x & y-z \\ w & y \end{pmatrix} \\ 0 &= w-x+y \Rightarrow x = w+y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \right\rangle &= 0 \\ &= \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \\ 0 &= z \end{aligned}$$

Con estas restricciones el complemento ortogonal es $N^{\perp}=\left\{\begin{pmatrix} w & w+y \\ y & 0 \end{pmatrix} \middle| w,y\in\mathbb{R}\right\}$.

Proceso de Ortogonalización de Gram-Schmidt

A partir de una base cualquiera se puede obtener una base ortogonal mediante el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, el cual especifica

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 &= \bar{v}_1 \\ \bar{w}_i &= \bar{v}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle \bar{v}_i|\bar{w}_k\rangle}{\langle \bar{w}_k|\bar{w}_k\rangle}\bar{w}_k, \qquad \forall\, 1<i\leq n \end{aligned}$$

Siendo $\{\bar{w}_1,\bar{w}_2,\bar{w}_3,\dots,\bar{w}_n\}$ la base ortogonal.

EJEMPLO. Sea la base $B=\{x^2+x+1, x^2+1, x^2+x\}$. Esta base no es ortogonal bajo el producto interno

$$\langle a_1x^2+b_1x+c_1|a_2x^2+b_2x+c_2\rangle = a_1a_2+2b_1b_2+3c_1c_2$$

Mediante la ortogonalización de Gram-Schmidt se obtendrá una base ortogonal.

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 &= x^2+x+1 \\ \bar{w}_2' &= (x^2+1) - \frac{\langle x^2+1|x^2+x+1\rangle}{\langle x^2+x+1|x^2+x+1\rangle}(x^2+x+1) \\ &= (x^2+1)-\frac{4}{6}(x^2+x+1) \Rightarrow \frac{2}{6}x^2-\frac{4}{6}x+\frac{2}{6} \therefore \bar{w}_2 = x^2-2x+1 \\ \bar{w}_3' &= (x^2+x) - \frac{\langle x^2+x|x^2+x+1\rangle}{\langle x^2+x+1|x^2+x+1\rangle}(x^2+x+1) \\ &\quad - \frac{\langle x^2+x|x^2-2x+1\rangle}{\langle x^2-2x+1|x^2-2x+1\rangle}(x^2-2x+1) \\ &= (x^2+x)-\frac{3}{6}(x^2+x+1)-\frac{-3}{12}(x^2-2x+1) \Rightarrow \frac{3}{4}x^2-\frac{1}{4} \therefore \bar{w}_3 = 3x^2-1 \end{aligned}$$

Finalmente, la base ortogonal es $B_{\perp}=\{x^2+x+1, x^2-2x+1, 3x^2-1\}$.

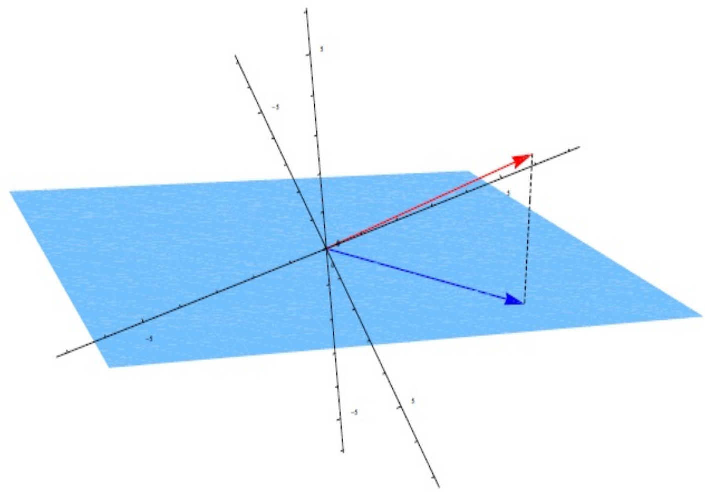
Proyección Ortogonal

El concepto de ortogonalidad permite calcular para todo vector $\bar{v}$ el elemento más cercano a él en cualquier subespacio. Dicho vector se obtiene al proyectar a $\bar{v}$ sobre una base ortogonal del subespacio, lo cual resulta en una combinación lineal:

$$\mathrm{Proy}_W\,\bar{v} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\langle \bar{v}|\bar{u}_i\rangle}{\|\bar{u}_i\|}\hat{u}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \bar{v} | \bar{u}_i \rangle}{\langle \bar{u}_i | \bar{u}_i \rangle} \bar{u}_i$$

El teorema de proyección estipula que la distancia entre un vector y su proyección sobre un subespacio es mínima.



EJEMPLO. La matriz del subespacio $H = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{C} \right\}$ que es la más próxima a $\bar{a} = \begin{pmatrix} 1-i & 2+i \\ 2-i & 1+i \end{pmatrix}$ bajo el producto interno

$$\langle A | B \rangle = \mathrm{tr}(AB^*)$$

se calcula a partir de la base ortogonal $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ -1+i & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

$$\mathrm{Proy}_{\mathrm{H}}\, \bar{\mathrm{a}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{2} \frac{\langle \bar{\mathrm{a}} | \bar{\mathrm{u}}_{\mathrm{i}} \rangle}{\| \bar{\mathrm{u}}_{\mathrm{i}} \|} \bar{\mathrm{u}}_{\mathrm{i}}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Proy}_{\mathrm{H}}\, \bar{\mathrm{a}} &= \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & 2+\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & 2+\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 & 1-\mathrm{i} \\ -1+\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1-\mathrm{i} \\ -1+\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 & 1-\mathrm{i} \\ -1+\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} 0 & 1-\mathrm{i} \\ -1+\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & 2+\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}}{\mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1+3\mathrm{i} & -2 \\ 2\mathrm{i} & -3-\mathrm{i} \end{pmatrix}}{\mathrm{tr}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & 1-\mathrm{i} \\ -1+\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{-2+2\mathrm{i}}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1-\mathrm{i} \\ -1+\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{\mathrm{h}}_0 = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$