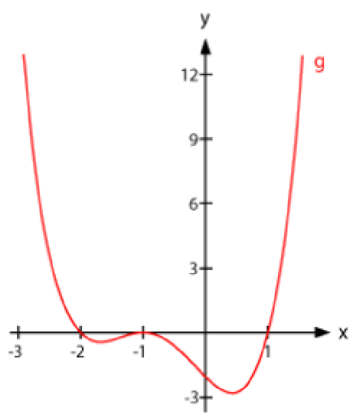
Raíces de Polinomios



$g(x)=(x-1)(x+1)^2(x+2)$

Los polinomios son ecuaciones, y por lo tanto también tienen soluciones; dichas soluciones se llaman raíces. El valor $\alpha \in \mathbb{C}$ es una raíz del polinomio $p(x)$ si $p(\alpha) = 0$.

Teorema fundamental del Álgebra

Si $p(x)$ es un polinomio de grado mayor a cero con coeficientes complejos, entonces $p(x)$ tiene, al menos, una raíz $\alpha \in \mathbb{C}$.

Número de raíces de un polinomio

Un polinomio puede expresarse en términos de polinomios lineales (grado uno):

$$p(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n)q_n$$

Esto implica que cada polinomio lineal tiene una raíz. Un polinomio de grado dos se descompone en dos factores lineales, y tiene dos raíces (una por cada factor). Un polinomio de tercer grado se factoriza en tres polinomios lineales, cada uno con una raíz. Siguiendo esta sucesión, un polinomio de grado n tiene n raíces.

Cuando una raíz se repite, se dice que tiene multiplicidad.

Posibles Raíces Racionales

Dado el polinomio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

si un número racional en su mínima expresión $\frac{p}{q}$ es raíz de $f(x)$, entonces p es factor de a_0 y q es factor de a_n. Requisitos del polinomio:

- ✓ coeficientes enteros,
- ✓ grado $n \geq 1$,
- ✓ y término $a_0 \neq 0$.

EJEMPLO. Para obtener las posibles raíces racionales del polinomio

$$p(x) = x^3 + x^2 - 14x - 24$$

se dividen los factores de $a_0 = -24$, entre los factores de $a_n = 1$.

Factores de -24: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24$.

Factores de 1: ±1.

Posibles raíces racionales: $\pm\frac{1}{1}, \pm\frac{2}{1}, \pm\frac{3}{1}, \pm\frac{4}{1}, \pm\frac{6}{1}, \pm\frac{8}{1}, \pm\frac{12}{1}, \pm\frac{24}{1}$.

Se puede aplicar la división sintética con cada posible raíz racional. Aplicando el algoritmo con $c = 1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -14 & -24 \\ 1 & & 1 & 2 & -12 \\ \hline & 1 & 2 & -12 & -36 \end{array}$$

la división sintética indica que no es raíz. Si ahora se toma en cuenta $c = -2$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -14 & -24 \\ -2 & & -2 & 2 & 24 \\ \hline & 1 & -1 & -12 & 0 \end{array}$$

entonces se obtiene la raíz $\alpha_1 = -2$. Como el polinomio degradado es de segundo grado, se puede factorizar y encontrar que las raíces restantes son $\alpha_2 = -3$ y $\alpha_3 = 4$.

Regla de los Signos de Descartes

Las posibles raíces racionales permiten encontrar algunas raíces fácilmente; pero es un método muy laborioso pues actúa por *fuerza bruta* (probar cada posible raíz en la división sintética).

La regla de los signos de Descartes permite clasificar a las raíces tomando en cuenta su naturaleza: real positiva, real negativa, o compleja. Dado el polinomio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

se presentan dos casos:

El número de raíces reales positivas de $p(x)$ es igual, o menor de dos en dos, al número de cambios de signo en los coeficientes de $p(x)$.

El número de raíces reales negativas de $p(x)$ es igual, o menor de dos en dos, al número de cambios de signo en los coeficientes de $p(-x)$.

Requisitos del polinomio:

- ✓ coeficientes reales,
- ✓ grado $n \geq 1$,
- ✓ término $a_0 \neq 0$.

EJEMPLO. Las posibles raíces racionales del polinomio

$$g(y) = y^4 + 4y^3 - y^2 - 16y - 12$$

son $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$. Se necesitaría probar doce veces la división sintética. Pero la regla de los signos simplificará el trabajo.

Para $g(y)$ existe un cambio de signo entre los coeficientes:

$$g(y) = y^4 + 4y^3 - y^2 - 16y - 12$$

En consecuencia el polinomio tiene una raíz real positiva. Para $g(-y)$ existen tres cambios de signo entre los coeficientes:

$$g(-y) = y^4 - 4y^3 - y^2 + 16y - 12$$

Por lo tanto, el polinomio tiene tres o una raíces reales negativas.

Estas consideraciones permiten clasificar las raíces en una tabla:

$\mathbb{R}^+$	1	1
$\mathbb{R}^-$	3	1
Nulas	0	0
$\mathbb{C}$	0	2
Total	4	

Con esta información se puede comenzar a inspeccionar las posibles raíces racionales. Tomando a 2:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 4 & -1 & -16 & -12 \\ 2 & & 2 & 12 & 22 & 12 \\ \hline & 1 & 6 & 11 & 6 & 0 \end{array}$$

se obtiene una raíz real positiva. Atendiendo a la clasificación hecha anteriormente, se descartan las restantes raíces positivas y se prueban las negativas. Tomando a -1 se obtendrá otra raíz. Finalmente, las raíces del polinomio son $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = -2$ y $\alpha_4 = -3$.

Raíces Complejas

Las raíces complejas de un polinomio generalmente vienen en pares: α como raíz, y el conjugado de ésta. Requisitos del polinomio: los coeficientes siempre son reales.

EJEMPLO. El polinomio $f(x) = 2x^2 + (1 - 2i)x - i$ tiene al menos una raíz compleja pues sus coeficientes son complejos. Esto no implica que sean conjugados. En cambio el polinomio $h(x) = x^4 + 3x^2 + 2$ tiene las raíces complejas $\alpha_{1,2} = \pm i$ y $\alpha_{3,4} = \pm\sqrt{2}i$. Como los coeficientes de $h(x)$ son reales, cada raíz compleja tendrá a su respectivo conjugado como otra raíz.