Definición de Polinomio y sus Propiedades

Un polinomio es una suma de términos algebraicos; es decir

$$p(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$

Para considerarse polinomio, es necesario destacar que los exponentes de x siempre son enteros mayores o iguales a cero. Los coeficientes pertenecen al conjunto de los complejos.

Grado de un polinomio

El grado de un polinomio $p(x)$ es la mayor potencia de x dentro del polinomio cuyo coeficiente es no nulo. Se denota como $\mathrm{gr}(p)$.

Igualdad de polinomios

Dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$ son iguales, si y solo si

1. sus respectivos grados son iguales.
2. son iguales término a término.

Operaciones

Adición

La suma de polinomios es un equivalente a la reducción de términos semejantes. Tiene las siguientes propiedades:

- ✓ cerradura.
- ✓ asociación.
- ✓ conmutación.
- ✓ elemento neutro, donde el polinomio nulo tiene grado indefinido.
- ✓ elemento inverso.

Multiplicación

Para la multiplicación de polinomios se realiza la multiplicación de cada término del primer factor por todo el segundo factor. Al finalizar se hace una reducción de términos semejantes. Sus propiedades son:

- ✓ cerradura.
- ✓ asociación.
- ✓ conmutación.
- ✓ elemento neutro, donde el polinomio unidad tiene grado cero.
- ✓ distribución.

Multiplicación por un escalar

Otra multiplicación es la indicada por un escalar (un número complejo) por un polinomio: cada término del polinomio se multiplica por el escalar.

EJEMPLO. El polinomio resultado de operar

$$3(x^2 + 2x - 1) + (x - 2)(x^3 + x + 1) =$$
$$(3x^2 + 6x - 3) + (x^4 + x^2 + x - 2x^3 - 2x - 2) =$$
$$(3x^2 + 6x - 3) + (x^4 - 2x^3 + x^2 - x - 2) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 5x - 5$$

Divisibilidad de Polinomios

El polinomio $g(x)$ es un factor de $f(x)$ si existe un polinomio $q(x)$ tal que

$$f(x) = g(x)q(x)$$

Por lo tanto, $f(x)$ es divisible entre $g(x)$. Si $g(x)$ no es factor, entonces se puede calcular el polinomio $r(x)$ tal que

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

Esta expresión se puede reescribir al dividir a ambos lados de la igualdad por el el polinomio $g(x)$ como

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

Esta última expresión es el algoritmo de la división para polinomios.

EJEMPLO. La división de $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ entre $g(x) = x - 2$ sigue el procedimiento de la división normal: el resultado del cociente por el divisor se resta al dividendo y da como resultado el residuo.

$$
\begin{array}{rr|rrrr}
 & & x^2 & +3x & +7 & \\
\cline{3-6}
x & -2 & x^3 & +x^2 & +x & +1 \\
 & & -x^3 & +2x^2 & & \\
\cline{3-4}
 & & & 3x^2 & +x & \\
 & & & -3x^2 & +6x & \\
\cline{4-5}
 & & & & 7x & +1 \\
 & & & & -7x & +14 \\
\cline{5-6}
 & & & & & 15
\end{array}
$$

Entonces, el polinomio cociente es $q(x) = x^2 + 3x + 7$, mientras que el residuo es $r(x) = 15$.

Teoremas del residuo y del factor

El polinomio $g(x) = x - c$, que divide a un polinomio de grado mayor $f(x)$, plantea los teoremas del residuo y del factor, útiles para la división de polinomios.

TEOREMA DEL RESIDUO

Dados un polinomio y un número $c \in \mathbb{C}$, el residuo de dividir el polinomio $p(x)$ entre $x - c$ es igual a $p(c)$.

TEOREMA DEL FACTOR

Un caso particular del teorema del residuo se da cuando el polinomio $p(x)$ es divisible entre $x - c$. Esta situación es válida si, y sólo si, $p(c) = 0$.

EJEMPLO. El residuo obtenido al dividir $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ entre $g_1(x) = x - 2$ es 15. Aplicando el teorema del residuo

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3 + x^2 + x + 1 \\
f(2) &= (2)^3 + (2)^2 + (2) + 1 \\
&= 8 + 4 + 2 + 1 \\
&= 15
\end{aligned}
$$

Pero si el divisor es $g_2(x) = x - (-1)$, entonces se aplica el teorema el factor

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3 + x^2 + x + 1 \\
f(-1) &= (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 \\
&= -1 + 1 - 1 + 1 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Se concluye que $g_2(x)$ es factor de $f(x)$, mientras que $g_1(x)$ no lo es.

División sintética

También conocida como regla de Ruffini, es un arreglo que evita extender la división a más de tres renglones. Se realiza una división como tal pero de forma sintetizada, donde se puede colocar el divisor, el dividendo, el cociente y el residuo en dos líneas. El proceso aplica únicamente sumas y productos con los coeficientes.

EJEMPLO. Tomando los tres polinomios $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, $g_1(x) = x - 2$ y $g_2(x) = x + 1$, el proceso de la división sintética arroja los mismos resultados que los teoremas del residuo y factor.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
2 & & 2 & 6 & 14 \\
\hline
 & 1 & 3 & 7 & 15
\end{array}
$$

Para $g_1(x)$:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & & -1 & 0 & -1 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

La ventaja de la división sintética radica en que el tercer renglón del arreglo es un polinomio cociente. Cuando el residuo es cero, el cociente es un polinomio degradado.