Forma Exponencial

Leonhard Euler demostró la relación entre las funciones seno y coseno, la base de los logaritmos naturales, y la unidad imaginaria:

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x$$

Esta ecuación permite una nueva representación del número complejo:

$$re^{\varphi i} = r \operatorname{cis} \varphi$$

Ambas formas son equivalentes. La única aclaración que debe hacerse es en el argumento: puesto que en la forma de Euler el ángulo forma parte del exponente, éste debe expresarse en radianes.

La naturaleza de la igualdad y de las operaciones no cambia con la representación. Siempre se mantendrá la operación de módulos y argumentos.

La forma exponencial justifica la suma, resta, multiplicación y división de argumentos de las operaciones en forma trigonométrica, puesto que es la aplicación directa de las leyes de exponentes:

Multiplicación $\quad r_1 e^{\varphi_1 i} \cdot r_2 e^{\varphi_2 i} = (r_1 \cdot r_2) e^{(\varphi_1 + \varphi_2) i}$

División $\quad \dfrac{r_1 e^{\varphi_1 i}}{r_2 e^{\varphi_2 i}} = \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right) e^{(\varphi_1 - \varphi_2) i}$

Potenciación $\quad (re^{\varphi i})^n = (r)^n e^{n\varphi i}$

Radicación $\quad \sqrt[n]{re^{\varphi i}} = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\varphi + 2k\pi}{n} i}; k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

Ecuaciones con Números Complejos

Básicamente, existen dos tipos de ecuaciones planteadas con números complejos basadas en la naturaleza de la solución: real y compleja.

Solución real

Este tipo de ecuaciones plantean su solución con base en sus dos componentes. Es decir, considera a las partes real e imaginaria de manera independiente.

EJEMPLO. Obtén los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación

$$\sqrt{2} \operatorname{cis} 195° \, (-b + ai) = \frac{2e^{2\pi i}(i^9)}{2 + 2i} 4 \operatorname{cis} 240°$$

El procedimiento es sencillo. Simplemente se simplifica y despeja la ecuación mediante la igualdad de los números complejos en forma binómica.

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} \operatorname{cis} 195° \, (-b + ai) &= \frac{2e^{2\pi i}(i^9)}{2 + 2i} 4 \operatorname{cis} 240° \\
-b + ai &= \frac{2e^{2\pi i}(i^9)(4 \operatorname{cis} 240°)}{(2 + 2i)\left(\sqrt{2} \operatorname{cis} 195°\right)} \\
&= \frac{(2 \operatorname{cis} 0°)(\operatorname{cis} 90°)(4 \operatorname{cis} 240°)}{\left(2\sqrt{2} \operatorname{cis} 45°\right)\left(\sqrt{2} \operatorname{cis} 195°\right)} \\
&= \frac{8 \operatorname{cis} 330°}{4 \operatorname{cis} 240°} \\
&= 2 \operatorname{cis} 90° \\
&= 2i
\end{aligned}$$

Por igualdad en los números complejos, los valores buscados son $a = 2$ y $b = 0$.

Solución compleja

A diferencia del tipo anterior, se debe considerar a la variable como un único e indivisible número complejo.

EJEMPLO. Obtén los valores de $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen la ecuación

$$\frac{1}{2\overline{\left(8e^{\frac{11}{6}\pi i}\right)}} = \frac{\left(6 - 2\sqrt{3}i\right) - \left(4 - 4\sqrt{3}i\right)}{z_3}$$

Es necesario reducir los términos semejantes y simplificar los factores.

$$\frac{1}{2\overline{\left(8e^{\frac{11}{6}\pi i}\right)}} = \frac{\left(6-2\sqrt{3}i\right)-\left(4-4\sqrt{3}i\right)}{z_3}$$

$$\frac{1}{2(8\operatorname{cis}30°)} = \frac{2+2\sqrt{3}i}{z_3}$$

$$\begin{aligned} z^3 &= (4\operatorname{cis}60°)(16\operatorname{cis}30°) \\ &= 64\operatorname{cis}90° \\ z &= \sqrt[3]{64}\operatorname{cis}\frac{90°+k360°}{3};\forall\, k=0,1,2 \end{aligned}$$

Finalmente, las soluciones de la ecuación son tres raíces cúbicas:

$$z = 4\operatorname{cis}30°,\qquad z = 4\operatorname{cis}150°,\qquad z = 4\operatorname{cis}270°$$

No existe un método para resolver las ecuaciones con números complejos, simplemente se deben hacer simplificaciones y reducciones de términos semejantes. Un consejo valioso es transformar todos los factores a forma trigonométrica o exponencial, y si existen sumas realizarlas en forma binómica.