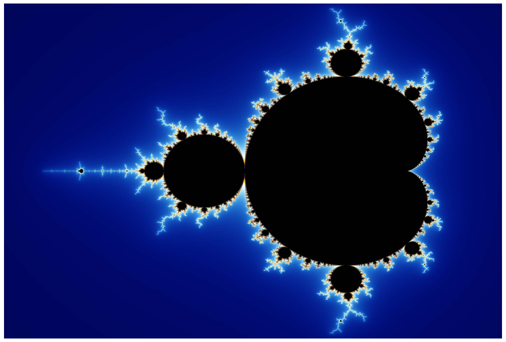
# Los Números Complejos



Los números reales necesitan una extensión numérica cuando aparecen ecuaciones del tipo

$$x^2 + 1 = 0$$

puesto que su solución no existe en el conjunto real. Peor aún, cuando existen ecuaciones como

$$x^2 + x + 1 = 0$$

cuyas soluciones son la suma de un número real más un número que no es real.

Los números complejos aparecen al plantear la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$, que permite definir este conjunto como

$$\mathbb{C} = \left\{ z \middle| z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1} \right\}$$

Los números complejos contienen a los números reales puros, los imaginarios puros y los complejos (real e imaginario).


# Forma Binómica

La forma binómica de un número complejo indica un número real y uno imaginario de manera heterogénea; es decir, ambos están separados por un signo $(+)$ o $(-)$.

$$a + bi, \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$$

La parte determinada por $a$ es la parte real, y la parte denotada por $bi$ es la imaginaria. Si $a = 0$, entonces el número complejo es imaginario puro; si $b = 0$, entonces es real puro.

## Igualdad

La igualdad entre números complejos se da cuando las partes reales son iguales entre sí, y al mismo tiempo las imaginarias también son iguales entre sí:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2, \qquad \forall\, z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$$

## Conjugado

El de un número complejo se forma al cambiar de signo la parte imaginaria:

$$\overline{a + bi} = a - bi$$

## Operaciones y sus propiedades: adición, sustracción, multiplicación y división

Las operaciones involucran tanto a la parte real como a la imaginaria. En la adición y la sustracción no combinan ambas partes, mientras que el producto y el cociente sí lo hacen.

### Adición y sustracción

Estas operaciones suman y restan parte real con parte real y parte imaginaria con parte imaginaria:

- ✓ $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
- ✓ $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$

Sus propiedades son: cerradura, conmutación, asociación, elementos neutro e inversos.

### Multiplicación y división

Estas operaciones combinan completamente los números en cuestión mediante multiplicación de binomios algebraicos comunes y corrientes.

Para la multiplicación:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i \end{aligned}$$

Para la división es necesario multiplicar y dividir por el conjugado del denominador:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}\cdot\frac{a_2-b_2i}{a_2-b_2i}$$
$$=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}+\frac{(a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}i$$

Las propiedades cumplidas son: cerradura, conmutativa, asociativa, elemento neutro, elementos inversos excepto el 0 y distribución con respecto de la suma.

**EJEMPLO**. La operación siguiente involucra las cuatro operaciones mencionadas:

$$(1+2i)(-2+i)-\frac{4+i}{3-3i}+(1-i)=(-4-3i)-\frac{4+i}{3-3i}+(1-i)$$
$$=(-3-4i)-\frac{4+i}{3-3i}\cdot\frac{3+3i}{3+3i}$$
$$=(-3-4i)-\frac{9+15i}{18}\Rightarrow\frac{7}{2}-\frac{29}{6}i$$

### Propiedades del conjugado

El conjugado en los números complejos presenta las siguientes propiedades:

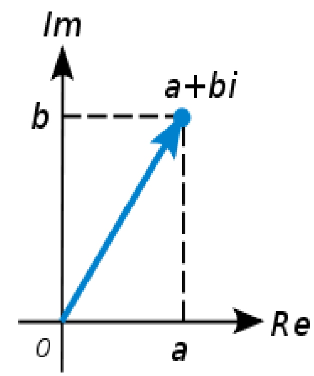
- ✓ $\bar{\bar{z}}=z$
- ✓ $z_1=\bar{z}_1\Leftrightarrow z_1\in\mathbb{R}$
- ✓ $z_1+\bar{z}_1\in\mathbb{R}$
- ✓ $z_1\bar{z}_1\in\mathbb{R}$
- ✓ $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$
- ✓ $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$

El conjugado de un número complejo permite establecer el concepto de métrica en los números complejos al concebir el módulo y el ángulo entre números complejos.

## Representación Gráfica

Como un número complejo es una pareja de números con naturaleza definida, puede representársele como un punto en un plano coordenado:

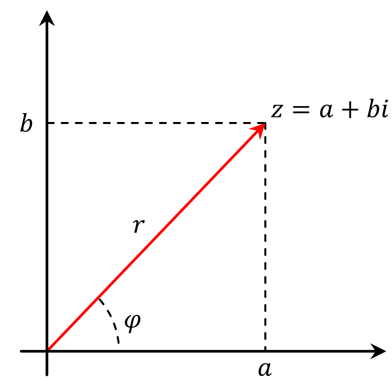
$z=a+bi\rightarrow(a,b)$




La convención establece que las abscisas representan la parte real, mientras que las ordenadas son la parte imaginaria. Este plano coordenado se llama plano complejo o plano de Argand.

A cada número complejo le corresponde uno y sólo un punto dentro del plano. Con la representación gráfica, un número complejo puede tener una medida (módulo) y un argumento (ángulo), los cuales convierten al sistema de referencia cartesiano en un sistema de coordenadas polares.

## Forma Trigonométrica




Con la representación gráfica de los números complejos surge la posibilidad de ubicarlos con base en una magnitud y un ángulo. Al dibujar al número complejo como una recta (o flecha) desde el origen hasta el punto $Z(a,b)$ se incluye una magnitud (desde $O$ hasta $Z$) y un ángulo (formado entre el eje real y la flecha).

El triángulo formado por las rectas $r$, $a$ y $b$ permite establecer la relación entre la forma binómica y la trigonométrica.

Para el ángulo o argumento se sabe que

$$\tan\varphi=\frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}\Rightarrow\frac{b}{a}\therefore\varphi=\arctan\frac{b}{a}$$

Para la magnitud o módulo se aplica el teorema de Pitágoras:

$$r^2=a^2+b^2\Rightarrow r=\sqrt{a^2+b^2}$$

El proceso contrario implica la relación de las rectas citadas con senos y cosenos.

$$\cos\varphi = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} \Rightarrow \frac{a}{r} \therefore a = r\cos\varphi$$

$$\sin\varphi = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} \Rightarrow \frac{b}{r} \therefore b = r\sin\varphi$$

Por lo tanto la forma trigonométrica de un número complejo es

$$a + bi = r\cos\varphi + ri\sin\varphi \Rightarrow r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

## Igualdad

Dos números complejos $z_1 = r_1 \operatorname{cis}\varphi_1$ y $z_2 = r_2 \operatorname{cis}\varphi_2$ son iguales si sus módulos son iguales y sus argumentos difieren un múltiplo de $2\pi$ radianes.

$$r_1 = r_2, \qquad \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, \qquad \forall\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

## Operaciones

Son cuatro las operaciones que pueden realizarse con la forma trigonométrica del número complejo: producto, cociente, potenciación y radicación.

### Multiplicación y división

Sean $z_1 = r_1 \operatorname{cis}\varphi_1$ y $z_2 = r_2 \operatorname{cis}\varphi_2$. Su producto estará dado por:

$$z_1 z_2 = (r_1 \operatorname{cis}\varphi_1)(r_2 \operatorname{cis}\varphi_2) \Rightarrow r_1 r_2 \operatorname{cis}(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Mientras tanto, su división será:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \operatorname{cis}\varphi_1}{r_2 \operatorname{cis}\varphi_2} \Rightarrow \frac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\varphi_1 - \varphi_2)$$

### Potenciación y radicación

La potenciación de $z = r \operatorname{cis}\varphi$ equivale a una multiplicación y opera como tal.

$$\begin{aligned} z^n &= z \cdot z \cdot z \cdot \ldots \cdot z \\ (r \operatorname{cis}\varphi)^n &= (r \operatorname{cis}\varphi)(r \operatorname{cis}\varphi)(r \operatorname{cis}\varphi) \ldots (r \operatorname{cis}\varphi) \\ &= (r \cdot r \cdot r \cdot \ldots \cdot r) \operatorname{cis}(\varphi + \varphi + \varphi + \cdots +) \Rightarrow r^n \operatorname{cis} n\varphi \end{aligned}$$

La ecuación $(r \operatorname{cis}\varphi)^n = r^n \operatorname{cis} n\varphi$, $\forall\ n \in \mathbb{Q}$, es conocida como el teorema de De Moivre.

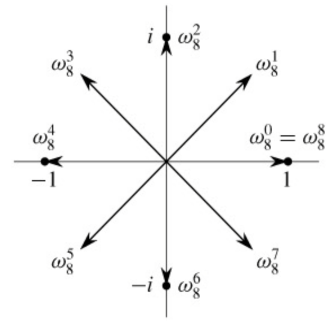
La radicación de un número complejo considera la división del circulo en partes iguales (puesto que los radicales son exponentes fraccionarios).

$$\begin{aligned} w &= \sqrt[n]{z} \\ &= \sqrt[n]{r \operatorname{cis}\varphi} \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de De Moivre y considerando que los $360°$ se dividen de manera equitativa, la radicación se lleva a cabo como:

$$w = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis}\frac{\varphi + k360°}{n} \quad \forall\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n - 1$$

**EJEMPLO**. El cálculo de la siguiente operación implica sólo el manejo de módulos y argumentos, lo que facilita su realización con respecto a la forma binómica.




$$\begin{aligned} z^8 &= \left(\frac{4 \operatorname{cis} 267°}{2 \operatorname{cis} 177°}\right)(2 \operatorname{cis} 210°)^3 \\ &= \left[\frac{4}{2}\operatorname{cis}(267° - 177°)\right][2^3 \operatorname{cis}(3 \cdot 210°)] \\ &= (2 \operatorname{cis} 90°)(8 \operatorname{cis} 630°) \end{aligned}$$

Los argumentos mayores a $360°$ y menores a $0°$ deben ajustarse.

$$z^8 = (2 \operatorname{cis} 90°)(8 \operatorname{cis} 270°) \Rightarrow 16 \operatorname{cis} 360°$$

$$z = \sqrt[8]{16} \operatorname{cis}\frac{0° + k360°}{8}; k = 0, 1, 2, \ldots, 7$$

Arrojando las ocho raíces complejas:

$$z_1 = \sqrt{2} \operatorname{cis} 0°, \qquad z_2 = \sqrt{2} \operatorname{cis} 45°, \qquad z_3 = \sqrt{2} \operatorname{cis} 90°$$
$$z_4 = \sqrt{2} \operatorname{cis} 134°, \qquad z_5 = \sqrt{2} \operatorname{cis} 180°, \qquad z_6 = \sqrt{2} \operatorname{cis} 225°$$
$$z_7 = \sqrt{2} \operatorname{cis} 270°, \qquad z_8 = \sqrt{2} \operatorname{cis} 315°$$