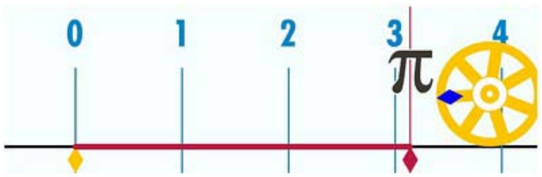
El Conjunto de los Números Reales

La solución de la ecuación $x^2 - 5 = 0$ no es un número racional. Entonces es necesaria una nueva expansión a los conjuntos numéricos que incluye a números como $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$, e, π, φ, conocidos como los números irracionales.



La unión de los números racionales y los irracionales es el conjunto de los números reales:

$$\mathbb{R} = \{x|-\infty < x < \infty\}$$
$$= \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$

La definición formal parte de la teoría de conjuntos mediante las cortaduras de Dedekind, definidas como

$$\mathcal{A}_r = \{a \in \mathbb{Q} | a < r\}$$

donde r es un número real.

Operaciones: adición y producto

La suma y producto entre números reales se realiza de la misma forma que en los conjuntos numéricos anteriores, donde los números irracionales se suman y multiplican mediante las leyes de los signos y la reducción de términos semejantes. Las propiedades de estas operaciones son las mismas que en la suma y multiplicación de los números racionales.

Orden

Tanto las reglas de los signos, las propiedades de las desigualdades como la naturaleza atendiendo al signo son heredadas de los números racionales, que a su vez vienen de los enteros.

Completitud de los reales

COTA SUPERIOR. Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}$. Cualquier elemento t tal que $x \leq t$, donde $x \in S$, es una cota superior.

MÁXIMO. Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}$. Un elemento de S es máximo si es una cota superior, y además pertenece a S.

SUPREMO. Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}$. Un elemento es supremo de S si es la menor cota superior.

La completitud en los números reales indica que todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente tiene un supremo que pertenece a $\mathbb{R}$.

Valor absoluto

La recta numérica incluye el concepto de distancia entre dos puntos; la distancia algebraica entre el origen (cero) y cualquier número se llama valor absoluto:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \alpha < 0 \end{cases}$$

Sus propiedades son

1. $|\alpha| \geq 0$.
2. $|\alpha|^2 = \alpha^2$.
3. $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$.
4. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

Si α es un número real positivo, se tendrá que el valor absoluto de un punto x está situado entre $-\alpha$ y α, si y sólo si $|x| < \alpha$; por lo que

$$|x| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < x < \alpha$$

Por otro lado, si x está situado antes de $-\alpha$ o después de α, significa que $|x| > \alpha$; por lo tanto, se tendrá que

$$|x| > \alpha \Leftrightarrow x < -\alpha \text{ ó } \alpha < x$$

Resolución de Desigualdades

En los números reales es posible encontrar intervalos solución a las desigualdades, las cuales se basan en en el orden de los números reales. Puesto que se trabaja con intervalos se pueden incluir los conceptos de cotas, máximo, supremo y completitud en los reales. Adicionalmente, el valor absoluto desempeña un papel importante en los intervalos solución de las desigualdades.

EJEMPLO. El conjunto solución de la desigualdad

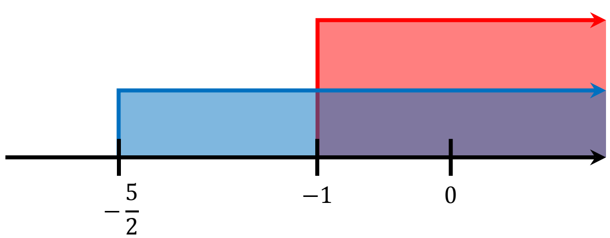
$$\frac{x-2}{x+1} < 3$$

se encuentra a partir de dos casos: 1) cuando el denominador es un número positivo, y 2) cuando es negativo.

Caso $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$

$$\begin{gathered} \frac{x-2}{x+1} < 3 \\ (x+1)\left(\frac{x-2}{x+1}\right) < 3(x+1) \\ x - 2 < 3x + 3 \\ -5 < 2x \\ -\frac{5}{2} < x \end{gathered}$$

Tomando esta solución y la restricción planteada al inicio se realiza una intersección entre los dos intervalos



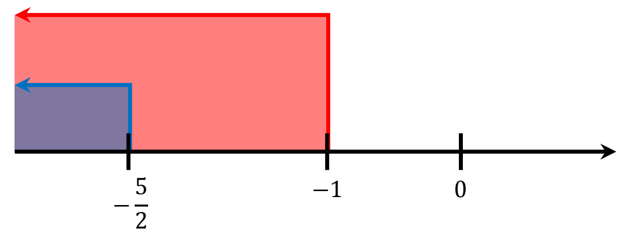
El intervalo solución para este caso es la zona en color lila; es decir, $-1 < x$.

Caso $x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1$

$$x - 2x + 1 < 3$$

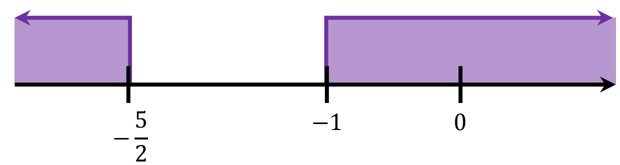
$$\begin{gathered} (x+1)\left(\frac{x-2}{x+1}\right) > 3(x+1) \\ x - 2 > 3x + 3 \\ -5 > 2x \\ -\frac{5}{2} > x \end{gathered}$$

Esta solución y la restricción planteada se intersecan dando como resultado el intervalo solución de este caso.



La solución nuevamente es la zona donde se combinan los colores rojo y azul; es decir, $x < -\frac{5}{2}$.

La solución general estará dada por la unión de las soluciones de los casos 1 y 2.



O bien, $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup (-1, \infty)$.