Los Números Enteros

En la ecuación $n + x = m, \forall\, m, n \in \mathbb{N}$ la solución será un número x, tal que sumado a n dé como resultado m; es decir, se tiene que

$$x = m - n$$

Con base en el orden de los números naturales se tienen tres posibles soluciones:

1. $n < m \therefore x \in \mathbb{N}$
2. $n = m \therefore x \notin \mathbb{N}$
3. $n > m \therefore x \notin \mathbb{N}$

De acuerdo con estos casos, el conjunto numérico debe extenderse a los llamados número enteros:

$$\mathbb{Z} = \{x | x = m - n, \forall\, m, n \in \mathbb{N}\}$$

Igualdad

Para la igualdad en los números enteros se definen $a, b \in \mathbb{Z}\ y\ m, n, p, q \in \mathbb{N}$. Si cada número entero es

$$\begin{aligned} a &= m - n \\ b &= p - q \end{aligned}$$

entonces

$$a = b \Leftrightarrow m - n = p - q$$

Operaciones: adición y producto

La adición en los números enteros se define como

$$\begin{aligned} a + b &= (m - n) + (p - q) \\ &= m - n + p - q \\ &= m + p - n - q \\ &= (m + p) - (n + q) \end{aligned}$$

para $a = m - n, b = p - q \in \mathbb{Z}$ y $m, n, p, q \in \mathbb{N}$. Las propiedades inherentes a la operación son las mismas que en la suma de naturales, incluyendo ahora:

- ✓ elemento neutro.
- ✓ elemento inverso.

El producto para este conjunto será

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (m - n) \cdot (p - q) \\ &= mp - mq - np + nq \\ &= mp + nq - mq - np \\ &= (mp + nq) - (mq + np) \end{aligned}$$

considerando $a = m - n, b = p - q \in \mathbb{Z}$ y $m, n, p, q \in \mathbb{N}$. Las propiedades son las mismas que en el producto de naturales, incluyendo a la distribución.

Dentro de los números enteros se definen las reglas para reconocer el signo que cada número debe poseer:

- ✓ $a \cdot 0 = 0$
- ✓ $(a) \cdot (-b) = -(ab)$ primera regla de los signos
- ✓ $(-a)(-b) = ab$ segunda regla de los signos.

Orden

Para los números enteros, también se puede definir un orden dentro de ellos. Dados dos números enteros a y b,

$$a < b \Leftrightarrow \exists\, x \in \mathbb{Z} \ni a + x = b$$

Esta definición también incluye el cumplimiento de la ley de la tricotomía.

Para las desigualdades se cumplen:

1. $a < b \Rightarrow a + c < b + c.$
2. $a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c, \forall\, c > 0.$
   $a < b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c, \forall\, c < 0.$

3. $a < b, b < c \Rightarrow a < c$ (ley de transitividad).

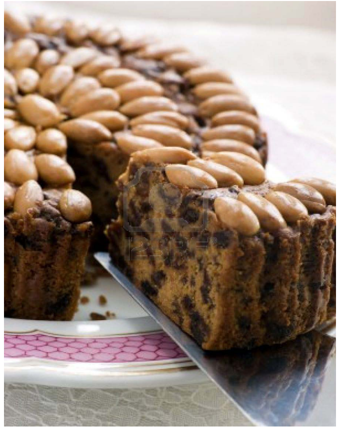
Finalmente, hay que tomar en cuenta la naturaleza de un número entero:

1. El número a es positivo si $a > 0$.
2. El número a es negativo si $a < 0$.
3. El número 0 es neutro.

Los Números Racionales

Cuando se plantean ecuaciones con los números enteros como

$$bx = a, \forall\, a, b \in \mathbb{Z}$$



la solución no siempre será un entero, ya que

- ✓ si b es factor de $a, x \in \mathbb{Z}$.
- ✓ si b no es factor de a, y $b \neq 0, x \notin \mathbb{Z}$.
- ✓ si $b = 0$ con $a \neq 0$, $x = \nexists$ y con $a = 0$, x está indeterminado.

De acuerdo con estos casos, los números racionales se definen como

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \middle| x = \frac{a}{b}, \forall\, a, b \in \mathbb{Z}; b \neq 0 \right\}$$

Igualdad

En los números racionales se definen $p, q \in \mathbb{Q}$ y $a, b, c, d \in \mathbb{Z}, b, d \neq 0$. Si cada número es

$$p = ab$$
$$q = cd$$

entonces

$$p = q \Leftrightarrow ad = bc$$

Operaciones: adición y producto

La adición se define con $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ y $a, b, c, d \in \mathbb{Z}, b, d \neq 0$ como

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Sus propiedades son las mismas que en la suma de enteros.

La multiplicación con $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ y $a, b, c, d \in \mathbb{Z}, b, d \neq 0$ se define como

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Sus propiedades son heredadas de la multiplicación de los números enteros, ahora incluyendo

- ✓ elemento inverso, excepto para 0.

Las reglas de los signos se cumplen exactamente de la misma forma que en los enteros.

Orden

El orden en los números racionales varía, debido a que se trabaja con porciones. Sean $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}, b, d > 0$.

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc$$

En consecuencia, también se cumple la ley de la tricotomía.

Las propiedades de las desigualdades en los números racionales estipulan que dados tres números racionales x, y, z, se cumple que

1. $x < y \Rightarrow x + z < y + z$.
2. $x < y \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z, \forall\, z > 0$.
   $x < y \Rightarrow x \cdot z > y \cdot z, \forall\, z < 0$.
3. $x < y, y < z \Rightarrow x < z$ (ley de transitividad).

La naturaleza de los números racionales se clasifica igual que los números enteros: positivos, negativos y cero.

Densidad de los números racionales

En la recta numérica, los números racionales se representan como una línea densa; es decir, continua. La densidad de los números racionales establece que entre dos números racionales siempre existe otro número racional.

Algoritmo de la División

Un número racional es un cociente que tiene una expresión con parte entera y parte decimal. El decimal es periódico cuando un grupo de dígitos se repite de manera indefinida a partir de un determinado lugar a la derecha del punto decimal.

La expresión decimal se obtiene con el algoritmo de la división de los números enteros. Dados a y b, con $b > 0$, existen dos enteros únicos q y r, con $0 \leq r < b$, tales que

$$a = bq + r$$

o bien,

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$$

EJEMPLO. Para obtener la expresión decimal de $\frac{4}{11}$ se necesita realizar multiplicaciones y divisiones por 10.

En el primer paso se toma $\frac{4}{11}$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{4}{11}\right)(10) &= \frac{40}{11} \\ &= 3 + \frac{7}{11} \Rightarrow \frac{4}{11} = \frac{3}{10} + \frac{7}{110} \ldots (1)\end{aligned}$$

En el segundo paso se trabaja con $\frac{7}{110}$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{7}{110}\right)(100) &= \frac{700}{110} \\ &= 6 + \frac{40}{110} \Rightarrow \frac{7}{110} = \frac{6}{100} + \frac{4}{1100} \ldots (2)\end{aligned}$$

La expresión (2) contiene al cociente $\frac{4}{1100}$ que se calcula de idéntica forma que $\frac{4}{11}$ al multiplicar por 100. De esta manera, el período decimal es 36 y la expresión decimal buscada se obtiene al sustituir en (2) el cálculo mencionado, y en (1) la expresión (2).

$$\begin{aligned}\frac{4}{11} &= \frac{3}{10} + \frac{6}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{6}{10000} + \cdots \\ &= 0.3636\overline{36}\end{aligned}$$

El cociente de enteros también puede obtenerse a partir de la expresión decimal.

EJEMPLO. Dado $0.112\overline{12}$, el cociente se plantea como

$$\frac{a}{b} = 0.11212\overline{12}$$

El período inicia en la segunda cifra decimal, y la expresión debe multiplicarse por 10

$$10\left(\frac{a}{b}\right) = 1.1212\overline{12} \ldots (1)$$

El período tiene dos cifras decimal, y al multiplicar (1) por 100

$$1000\left(\frac{a}{b}\right) = 112.1212\overline{12} \ldots (2)$$

se puede restar (1) de (2) término a término

$$\begin{aligned}1000\left(\frac{a}{b}\right) - 10\left(\frac{a}{b}\right) &= 112.12\overline{12} - 1.12\overline{12} \\ 990\left(\frac{a}{b}\right) &= 111 \\ \frac{a}{b} = \frac{111}{990} &\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{37}{330}\end{aligned}$$