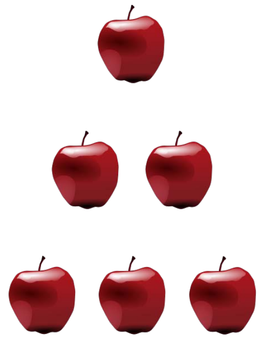
Los Números Naturales



Los números naturales sirven para contar. Al ser elementos innatos al pensamiento humano, fue necesario razonar sobre sus propiedades para definirlos matemáticamente: por medio de axiomas conocidos como los postulados de Peano:

1. $1 \in \mathbb{N}$.
2. $\forall\, n \in \mathbb{N}\, \exists\, n^* \in \mathbb{N}$.
3. $\forall\, n \in \mathbb{N}, 1 \neq n^*$.
4. Si $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$ tal que $n^* = m^* \Rightarrow n = m$.
5. Si para un conjunto no vacío A:
   a. $1 \in A$.
   b. $k \in A \Rightarrow k * \in A$.
   entonces $A = \mathbb{N}$.

Los postulados denotan matemáticamente el concepto intuitivo de número natural.

Operaciones: adición y producto

La suma en los números naturales se define como

1. $m + 1 = m^*, \forall\, m \in \mathbb{N}$.
2. $m + n^* = (m + n)^*\ \forall\, m, n \in \mathbb{N}$.

Cumpliendo con las propiedades de:

- ✓ cerradura.
- ✓ asociación.
- ✓ conmutación.
- ✓ cancelación.

Por otro lado, la definición de multiplicación indica

1. $m \cdot 1 = m, \forall\, m \in \mathbb{N}$.
2. $m \cdot n^* = m \cdot n + m\ \forall\, m, n \in \mathbb{N}$.

Cuyas propiedades son:

- ✓ cerradura.
- ✓ asociación.
- ✓ conmutación.
- ✓ elemento neutro.
- ✓ cancelación.

Junto con la suma proporcionan la

- ✓ distribución.

Orden

Al ser un conjunto con sucesor y antecesor, los números naturales presentan un orden. Dicho orden se establece con base en la jerarquía del sucesor y antecesor, donde el primero es mayor que el segundo. Entonces se pueden establecer tres situaciones para cada pareja de números naturales: $m < n$,$m = n$ y $m > n$, donde una y sólo una de las tres se satisface. Esta propiedad se conoce como la **ley de la tricotomía.**

Con base en las operaciones definidas en los números naturales y el orden establecido entre ellos, existen tres propiedades fundamentales en el orden:

- ✓ $m < n \Rightarrow m + p < n + p$.
- ✓ $m < n \Rightarrow m \cdot p < n \cdot p$.
- ✓ $m < n, n < p \Rightarrow m < p$.

Ésta última propiedad se llama **transitividad.**

Inducción Matemática

Es un razonamiento utilizado en la demostración de proposiciones que dependen de un parámetro (o variable), que solo admite valores naturales (a veces también al cero). Este método consiste en tres pasos fundamentales:

1. Demostrar que la proposición es válida para el primer valor admisible.
2. Asumir que la proposición es válida para el caso general, llamada hipótesis de inducción.

3. Demostrar a partir de la hipótesis, que la proposición es válida para el siguiente del caso general (tesis de inducción).

EJEMPLO. Demuestra por medio de inducción matemática la validez de la proposición

$$\sqrt{2n} < \frac{n}{2}, \qquad \forall\, 2 < n; n \in \mathbb{N}$$

1. $P(n = 3)$:

$$\sqrt{2(3)} < \frac{3}{2} + 1$$
$$\sqrt{6} < \frac{5}{2}$$
$$2.449489 \ldots < 2.5$$

Por lo tanto, es válida.

2. $P(n = k)$:

$$\sqrt{2k} < \frac{k}{2} + 1 \ldots (1)$$

que es válida por hipótesis de inducción.

3. $P(n = k + 1)$:

$$\sqrt{2(k+1)} < \frac{(k+1)}{2} + 1 \ldots (2)$$

que se demostrará es válida. Para ello se sumará $\frac{1}{2}$ a ambos lados de la hipótesis de inducción.

$$\sqrt{2k} + \frac{1}{2} < \frac{k}{2} + \frac{1}{2} + 1 \ldots (3)$$

Nótese que la parte derecha de las desigualdades (2) y (3) es la misma. Por lo tanto, por hipótesis de inducción y transitividad se establece que

$$\sqrt{2(k+1)} < \sqrt{2k} + \frac{1}{2} < \frac{k+1}{2} + 1$$

La demostración se centrará en

$$\sqrt{2(k+1)} < \sqrt{2k} + \frac{1}{2}$$

Elevando al cuadrado a ambos lados de la desigualdad y desarrollando

$$\left(\sqrt{2(k+1)}\right)^2 < \left(\sqrt{2k} + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$2(k+1) < 2k + \sqrt{2k} + \frac{1}{4}$$

$$2k + 2 < 2k + \sqrt{2k} + \frac{1}{4}$$

Por cancelación

$$2 < \sqrt{2k} + \frac{1}{4} \ldots (4)$$

La proposición establece que el primer valor admisible es mayor a 2; entonces, k toma valores de 3 en adelante. En consecuencia (4) siempre será válida pues conforme aumenta el valor de k, también lo hará el valor de $\sqrt{2k}$. Por lo tanto

$$\sqrt{2(k+1)} < \sqrt{2k} + \frac{1}{2} < \frac{k+1}{2} + 1$$

también lo será. Finalmente se concluye que la proposición es válida para $2 < n; n \in \mathbb{N}$