Cálculo de Determinantes

Existen varios métodos para calcular un determinantes. A excepción de la regla de Sarrus, todos aplican para determinantes de cualquier orden.

Matriz triangular

Si A es una matriz triangular (superior o inferior) entonces su determinante será el producto de los elementos de la diagonal principal:

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

EJEMPLO. El determinante

$$\det D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

puede reducirse a una matriz triangular (escalonada) por medio de transformaciones elementales. La única restricción es que se aplique la transformación $\alpha R_i + R_j \to R_j$. De otra forma, el valor del determinante se verá afectado.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & -6 \\ 0 & -5 & -1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -25$$

Regla de Sarrus

Obedece al producto por medio de las diagonales de los determinantes de orden 2 y orden 3.

EJEMPLO. Calculando el determinante del ejemplo anterior.

$$\begin{aligned} \det D &= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (1)(-1)(3) + (1)(3)(2) + (2)(4)(-4) \\ &\qquad - [(2)(-1)(2) + (3)(-4)(1) + (3)(1)(4)] \\ &= -3 + 6 - 32 - (-4 - 12 + 12) \Rightarrow -29 + 4 = -25 \end{aligned}$$

Desarrollo por cofactores

Sea A una matriz de orden n y M_{ij} es el determinante de la matriz de orden $n-1$ obtenida de A al eliminar el renglón i y la columna j. El determinante M_{ij} es conocido como el menor ij de A. Una matriz de orden n, tendrá n^2 menores.

Dependiendo de la ubicación del elemento a_{ij} en la matriz A, puede cambiar o no de signo. Ese número se calcula tal que

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

y es conocido como cofactor ij de A. El número de cofactores de una matriz es igual al número de menores.

El método de los cofactores dice: si A es una matriz de orden n, y r es un número entero tal que $1 \leq r \leq n$, entonces

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{rj} A_{rj}\,, \qquad \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ir} A_{ir}$$

Ambas expresiones son equivalentes para el obtener un determinante.

EJEMPLO. Nuevamente, se calcula el determinante D aplicando los cofactores sobre el primer renglón.

$$\begin{aligned} \det D &= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1}(1)\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(4)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (1)(-3+12) - (4)(3+8) + (2)(3+2) \\ &= 9 - 44 + 10 \Rightarrow -25 \end{aligned}$$

Pivoteo

Permite utilizar la transformación elemental $R_i \to kR_j + R_i$ sucesivamente hasta obtener un renglón o una columna más cómodo(a) para aplicar cofactores.

1. Se elige la columna o el renglón que contenga el mayor número de ceros posibles.

2. De la línea elegida se toma el elemento más cercano a cero; se aplica la transformación elemental $R_i \rightarrow kR_j + R_i$ para obtener ceros a lo largo de la línea elegida.

3. Se calcula el determinante por el método de cofactores.

EJEMPLO. Aplicando el pivoteo al determinante D se obtiene su valor.

$$\begin{aligned}\det D &= \begin{vmatrix}1 & 4 & 2\\ 1 & -1 & -4\\ 2 & 3 & 3\end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix}5 & 4 & -14\\ 0 & -1 & 0\\ 5 & 3 & -9\end{vmatrix}\\ &= (-1)2 + 2(-1)\begin{vmatrix}5 & -14\\ 5 & -9\end{vmatrix}\\ &= (1)(-1)(-45+70)\\ &= -25\end{aligned}$$

Matriz Adjunta

La matriz transpuesta, que se obtiene al sustituir cada elemento a_{ij} de una matriz A por su respectivo cofactor A_{ij}, se le llama matriz adjunta de A; se la denota por $\operatorname{adj} A$.

EJEMPLO. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix}-3 & 4 & 1\\ 0 & 5 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

La adjunta de A se obtiene al calcular cada cofactor:

$$\begin{aligned}A_{11} &= 5 - 2 \Rightarrow 3\\ A_{12} &= -(0-4) \Rightarrow 4\\ A_{13} &= 0 - 10 \Rightarrow -10\\ A_{21} &= -(4-1) \Rightarrow -3\\ A_{22} &= -3 - 2 \Rightarrow -5\\ A_{23} &= -(-3-8) \Rightarrow 11\\ A_{31} &= 8 - 5 \Rightarrow 3\\ A_{32} &= -(-6-0) \Rightarrow 6\\ A_{33} &= -15 - 0 \Rightarrow -15\end{aligned}$$

Entonces, la matriz adjunta es:

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix}3 & 4 & -10\\ -3 & -5 & 11\\ 3 & 6 & -15\end{pmatrix}^T \Rightarrow \begin{pmatrix}3 & -3 & 3\\ 4 & -5 & 6\\ -10 & 11 & -15\end{pmatrix}$$

Cálculo de la matriz inversa por medio de la adjunta

Para la matriz A de orden n, A^{-1} puede calcularse como

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A$$

Es de suma importancia calcular primero el determinante, ya que un valor nulo implicaría que la matriz es singular.

EJEMPLO. Sea la matriz

$$B = \begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ 0 & -2 & 2\\ 2 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

Al calcular su determinante

$$\begin{aligned}|B| &= -10 + 0 + 16 - (-4 + 2 + 0)\\ &= 6 - (-2)\\ &= 8\end{aligned}$$

se concluye que B es no-singular. Su matriz adjunta es

$$\operatorname{adj} B = \begin{pmatrix}-12 & -19 & 10\\ 4 & 3 & -2\\ -4 & 7 & -2\end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la inversa requerida es

$$B^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}-12 & -19 & 10\\ 4 & 3 & -2\\ -4 & 7 & -2\end{pmatrix}$$