Tipos Especiales de Matrices

Con base en la conjugación y la transposición, se pueden plantear tipos especiales de matrices.

Matrices simétricas y antisimétricas

Una matriz cuadrada A...

- ✓ ... es simétrica si $A = A^T$.
- ✓ ... es antisimétrica si $A = -A^T$.

Si A y B son matrices cuadradas, se cumple que

- ✓ $A + B$ es simétrica (o antisimétrica) si A y B son simétricas (o antisimétricas).
- ✓ $AA^T = A^T A$ es simétrica (o antisimétrica).
- ✓ $A + A^T$ es simétrica.
- ✓ $A - A^T$ es antisimétrica.
- ✓ $A = B + C$ para alguna matriz simétrica B y alguna matriz antisimétrica C.

Matrices ortogonales

Una matriz cuadrada A es ortogonal, si $AA^T = I$. En conclusión $A^T = A^{-1}$.

Matrices hermíticas y antihermíticas

Una matriz cuadrada A con elementos complejos...

- ✓ es hermítica si $A^* = A$.
- ✓ es antihermítica si $A^* = -A$.

Para las matrices cuadradas A y B se cumple que

- ✓ $A + B$ es hermítica (o antihermítica) si A y B son hermíticas (o antihermíticas).
- ✓ $AA^* = A^* A$ es hermítica (o antihermítica).
- ✓ $A + A^*$ es hermítica.
- ✓ $A - A^*$ es antihermítica.
- ✓ $A = B + C$ para alguna matriz hermítica B y alguna matriz antihermítica C.

Ecuaciones Matriciales y su Resolución

Al igual que cualquier tipo de ecuación el planteamiento y solución de ecuaciones matriciales no sigue una secuencia de pasos determinada.

Lo más recomendable es despejar la matriz incógnita con base en la suma, resta, multiplicación e inversa de matrices, y al final evaluar con las matrices conocidas si es factible encontrar una solución.

EJEMPLO. Obtén la matriz X tal que

$$AX - 2X = BX + CD$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Al despejar la matriz incógnita:

$$\begin{aligned} AX - 2X &= BX + CD \\ AX - 2X - BX &= CD \\ AX - 2IX - BX &= CD \\ (A - 2I - B)X &= CD \\ X &= (A - 2I - B)^{-1}CD \end{aligned}$$

Al analizar la singularidad de la suma:

$$\begin{aligned} A - 2I - B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

cuya inversa es

$$(A-2I-B)^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

Entonces, la matriz buscada es

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & -4\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Determinantes

Una matriz cuadrada puede asociarse a un número resultante de combinar todos sus elementos mediante una suma de productos. Dicho número se conoce como determinante.

Para la matriz $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ su determinante está definido como

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\\ &= a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\\ &= |A|\end{aligned}$$

El determinante tiene $2!=2$ productos.

El determinante de orden tres puede definirse a partir del determinante de orden dos.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

Su determinante se define como

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}\\ &= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})-a_{21}(a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13})+a_{31}(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})\\ &= a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}\\ &\qquad -a_{31}a_{22}a_{13}\end{aligned}$$

Este determinante tiene $3!=6$ productos, ya que el determinante es de orden tres.

En forma general, determinante de una matriz se define como

$$\det A=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{kp}M_{kp}$$

donde M_{kp} es un determinante de orden $n-1$ obtenido al quitar el renglón k y la columna p.

Las propiedades de un determinante son:

- ✓ $\det A=\det A^T$.
- ✓ $\det A=0$, si posee una columna (o renglón) de ceros.
- ✓ $\det A=0$, si posee dos columnas (o renglones) iguales.

Si B se ha obtenido de aplicar alguna transformación elemental sobre A,

- ✓ $-\det A=\det B$, si se han intercambiado dos renglones de A.
- ✓ $k\det A=\det B$, si se ha multiplicado un renglón de A por k.
- ✓ $\det A=\det B$, si se ha sumado un múltiplo de un renglón a otro de A.

Si A es una matriz no-singular,

- ✓ $\det A\neq 0$.

Si se realiza una multiplicación,

- ✓ $\det AB=(\det A)(\det B)$.
- ✓ $\det kA=k^n\det A$.