Matriz Identidad

En las matrices cuadradas existe el elemento neutro para la multiplicación: la matriz identidad. Esta matriz tiene orden n, y queda representada como:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

donde el producto de una matriz A de orden $m \times n$ por una matriz identidad es

- ✓ $A_{m\times n} \cdot I_n = A_{m\times n}$ (postmultiplicación)
- ✓ $I_m \cdot A_{m\times n} = A_{m\times n}$ (premultiplicación)

Matriz Inversa

Con la matriz identidad se plantea la posible existencia del elemento inverso para la multiplicación de matrices:

$$X \cdot A = A \cdot X \Rightarrow I$$

Si I es la matriz identidad, entonces A es una matriz cuadrada invertible (no-singular) y X es una matriz cuadrada única inversa de A. Se la representa como A^{-1}. La relación entre una matriz y su inversa es simétrica. No todas las matrices cuadradas tienen inversa.

EJEMPLO. La matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ no tiene inversa. Esto se pude demostrar encontrando una matriz $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, tal que $AX = I$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -x_{11} + x_{21} & -x_{12} + x_{22} \\ 2x_{11} - 2x_{21} & 2x_{12} - 2x_{22} \end{pmatrix} =$$

Por la igualdad entre matrices, se plantea el sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{ccccccc} -x_{11} & & & +x_{21} & & = & 1 \\ & -x_{12} & & & +x_{22} & = & 0 \\ 2x_{11} & & & -2x_{21} & & = & 0 \\ & 2x_{12} & & & -2x_{22} & = & 1 \end{array}$$

cuyo escalonamiento es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

en donde existen dos ecuaciones degeneradas; por lo tanto, el sistema no tiene solución y la matriz dada no tiene inversa (es singular).

La matriz inversa cumple que

- ✓ A^{-1} es única.
- ✓ $(A^{-1})^{-1} = A$.
- ✓ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- ✓ $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}, c \neq 0$.

Cálculo de la inversa por transformaciones elementales

Una matriz inversa puede obtenerse a partir de una matriz A dada mediante transformaciones elementales. Estas operaciones establecen una matriz elemental, que es una matriz identidad a la cual se le aplicó una transformación elemental e: $e(I) = E$. Una transformación elemental e en una matriz A puede obtenerse con el producto EA.

Si A es una matriz no-singular, entonces puede reducirse a la matriz identidad por medio de transformaciones elementales. Si la matriz E_q representa a la transformación e_q realizada sobre A, entonces se tiene que

$$E_q \dots E_3E_2E_1A = I$$
$$(E_q \dots E_3E_2E_1)A =$$

y por definición de matriz inversa $\left(E_q \ldots E_3 E_2 E_1\right) = A^{-1}$. Nuevamente, se invoca al método de eliminación Gaussiana, esta vez para encontrar la inversa de una matriz. Existe una variación mínima en el método:

1. Se construye una matriz M de orden $n \times 2n$. A la izquierda está la matriz A y a la derecha la matriz identidad; es decir,

$$M = (A \vdots I)$$

2. Mediante transformaciones elementales se lleva a la matriz M a su forma canónica escalonada. De esta forma la matriz identidad aparecerá a la izquierda, y a la derecha se obtendrá una matriz B; es decir

$$M = (I \vdots B)$$

La matriz B resultante será la inversa de A. Si en el proceso se genera algún renglón nulo en la parte izquierda, entonces A es singular.

EJEMPLO. Encuentra la matriz inversa de $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$.

Primero se forma el arreglo $M = (A \vdots I)$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \vdots & 1 & 0 \\ -4 & -3 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y se aplican transformaciones elementales hasta llegar a la forma canónica escalonada.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \vdots & 1 & 0 \\ -4 & -3 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \vdots & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & \vdots & 3 & 1 \\ 0 & -1 & \vdots & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \vdots & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Por lo que la matriz inversa es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Transposición y Conjugación de Matrices

Las matrices pueden realizar transformaciones entre sus columnas y sus renglones; dicha acción se conoce como transposición. La matriz transpuesta de A, denotada por A^T, se obtiene al intercambiar sus renglones por sus columnas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Para dos matrices A y B, y un escalar k se cumple que

- ✓ $(A+B)^T = A^T + B^T$.
- ✓ $(A^T)^T = A$.
- ✓ $(kA)^T = kA^T$.
- ✓ $(AB)^T = B^T A^T$.
- ✓ $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^T$.

Cuando los elementos de una matriz A son números complejos, entonces pueden conjugarse. La conjugación somete a A a obtener el conjugado de cada uno de sus elementos; se denota como $\bar{A}$. Las propiedades que cumplen estas matrices son las mismas que las propiedades del conjugado en los números complejos.

Al conjuntarse la transposición y la conjugación en una sola se obtienen las matrices conjugadas transpuestas, denotadas como

$$A^* = \bar{A}^T \Rightarrow \overline{A^T}$$

No importa qué operación se aplique primero, el resultado será siempre el mismo. Para dos matrices A y B, y un número complejo c, se establece que

- ✓ $(A^*)^* = A$.
- ✓ $(cA)^* = \bar{c} \cdot A^*$.
- ✓ $(A+B)^* = A^* + B^*$.
- ✓ $(AB)^* = B^* A^*$.
- ✓ $\operatorname{tr} A^* = \operatorname{tr} A$.