Matriz

Es un ente matemático equivalente a una tabla; es decir, es un arreglo organizado en renglones y columnas.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Al número de renglones y columnas de la matriz se le llama orden; se denota como $m \times n$ y la matriz tiene m renglones y n columnas.

Igualdad

Dadas las matrices

$$A=(a_{ij})_{m\times n}, \qquad B=(b_{ij})_{p\times q}$$

Entonces $A = B$, si y sólo si $m = p$, $n = q$ y $a_{ij} = b_{ij}$; es decir, dos matrices son iguales si tienen el mismo orden y elemento a elemento son iguales.

Operaciones con matrices

Las operaciones se realizan de manera similar a los conjuntos numéricos o polinómicos.

ADICIÓN

Dadas dos matrices A y B, ambas del mismo orden, su suma se calcula como

$$A+B=C$$
$$(a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

La suma de matrices posee las siguientes propiedades:

- ✓ cerradura, $A + B$ es una matriz de orden $m \times n$.
- ✓ asociación, $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- ✓ conmutación, $A + B = B + A$.
- ✓ elemento neutro, $A + O = A$ donde O es la matriz nula.
- ✓ elemento inverso, $A + (-A) = O$.

MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR

Dados una matriz A de orden $m \times n$ y un elemento numérico c (conocido como escalar), el producto $c \cdot A$ se calcula

$$\begin{aligned} c\cdot A &= c\cdot (a_{ij})_{m\times n} \\ &= (c\cdot a_{ij})_{m\times n} \end{aligned}$$

Las propiedades del producto de una matriz por un escalar son:

- ✓ asociación, $(cd) \cdot A = c \cdot (dA)$.
- ✓ elemento neutro, $c \cdot A = A$.
- ✓ distribución sobre la suma de matrices, $c \cdot (A + B) = c \cdot A + c \cdot B$.
- ✓ distribución sobre la suma de escalares, $(c + d) \cdot A = c \cdot A + d \cdot A$.

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

La multiplicación de matrices es un caso único en la multiplicación. Teniendo

$$A\cdot B=C$$

A (a la izquierda) pre-multiplica y B (a la derecha) post-multiplica. Este orden es inamovible, y por lo tanto cierra la posibilidad del cumplimiento de la propiedad conmutativa.

Si $A_{m\times n}$ y $B_{n\times p}$ se multiplican, el producto matricial $A \cdot B$ será aquél en el cual cada elemento de la matriz resultante se obtiene al sumar todos los productos del elemento a_{in} de la fila i en la matriz A por el elemento b_{nj} de la columna j de la matriz B; es decir,

$$A\cdot B=C$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kp} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kp} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{kp} \end{pmatrix} = C$$

Es equivalente a realizar el producto punto entre dos vectores:

$$(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots, a_{in}) \cdot (b_{1j}, b_{2j}, b_{3j}, \ldots, b_{nj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

La matriz producto tendrá un orden igual al número de renglones de la matriz que pre-multiplica por el número de columnas de la matriz que post-multiplica; es decir, orden $m \times p$.

El producto matricial presenta algunas propiedades del producto algebraico ordinario:

- ✓ asociación, $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
- ✓ distribución por la derecha, $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.
- ✓ distribución por la izquierda, $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$.

EJEMPLO. La siguiente operación matricial implica las dos multiplicaciones y la suma.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times3} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}_{3\times2} - 3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}_{2\times2} =$$
$$\begin{pmatrix} 3+2-2 & 1-2+0 \\ -6+1+0 & -2-1+0 \end{pmatrix}_{2\times2} + \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}_{2\times2} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}_{2\times2}$$

Matrices Cuadradas

Una matriz con el mismo número de renglones que de columnas es una matriz cuadrada. Toda matriz cuadrada, o de orden n, posee tres secciones:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Diagonal principal, elementos $a_{ij}, i = j$
Triángulo superior, elementos $a_{ij}, i < j$
Triángulo inferior, elementos $a_{ij}, i > j$

Matriz triangular

Es una matriz cuadrada donde uno de sus triángulos, ya sea el inferior o el superior, tiene todos sus elementos iguales a cero. Si el triángulo inferior es nulo, la matriz es triangular superior; si el triángulo superior es nulo, la matriz es triangular inferior. Sus propiedades son:

- ✓ $A + B$ es una matriz triangular superior (o inferior).
- ✓ $\alpha \cdot A$ es una matriz triangular superior (o inferior).
- ✓ $A \cdot B$ es una matriz triangular superior (o inferior).

Matriz diagonal

Si en una matriz cuadrada los dos triángulos contienen únicamente ceros, se tiene una matriz diagonal. En este tipo de matrices la multiplicación sí es conmutativa.

Traza de una matriz

Dada una matriz cuadrada A de orden n, su traza es un número calculado como

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Sus propiedades son:

- ✓ $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$
- ✓ $\operatorname{tr}(c \cdot A) = c \cdot \operatorname{tr} A$
- ✓ $\operatorname{tr}(A \cdot B) = \operatorname{tr}(B \cdot A)$

EJEMPLO. Dada la matriz

$$F = \begin{pmatrix} 2-i & 0 & 4+i \\ 3 & -1 & 2 \\ 4i & -7 & -1+2i \end{pmatrix}$$

su traza es $\operatorname{tr} F = (2 - i) + (-1) + (-1 + 2i) \Rightarrow i$.