Sistemas de Ecuaciones y Matrices

Los coeficientes del sistema de ecuaciones dan información sobre la solución. Al igual que los polinomios es posible colocar dichos coeficientes en un arreglo simplificado. Dado un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & \cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & \cdots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Al omitirse las incógnitas del sistema y separando los coeficientes de los términos independientes se obtiene un arreglo llamado matriz

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Transformaciones elementales

Dentro de la matriz obtenida pueden realizarse operaciones entre los renglones; dichos movimientos son las transformaciones elementales. Hay tres transformaciones elementales:

1. Intercambio de dos renglones ($R_i \leftrightarrow R_j$).
2. Multiplicación de un renglón por un número diferente de cero ($\alpha R_i \to R_j$).
3. Suma de un renglón con otro renglón, reemplazando éste último por el resultado obtenido ($R_i + R_j \to R_j$).

Cuando se aplica una transformación elemental se obtiene una nueva matriz llamada matriz equivalente. Si la matriz representa a un sistema de ecuaciones, la matriz transformada representa a un sistema de ecuaciones equivalente.

EJEMPLO. Sea el sistema de ecuaciones lineales $\begin{array}{ccccc} x & -3y & +2z & = & 4 \\ x & -y & +2z & = & -2 \\ 3x & -5y & +6z & = & 0 \end{array}$.

Su matriz de coeficientes es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -5 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

Al aplicarle transformaciones elementales se obtiene su solución.

1. Se multiplica por -1 el segundo renglón.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & -5 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

2. Se suman los renglones uno y dos, reemplazando este último.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 3 & -5 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

3. Se pueden aplicar dos transformación de manera conjunta: se multiplica por -3 el primer renglón y se suma con el tercero, reemplazándose este último.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & -12 \end{array}\right)$$

4. El segundo renglón se multiplica por $-\frac{1}{2}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & -12 \end{array}\right)$$

5. Se multiplica por 4 el segundo renglón y resta el tercero para reemplazarlo.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

6. Una última transformación es multiplicar por 3 el renglón dos y sumarlo al primero.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema de ecuaciones equivalente es $\begin{matrix} x & & +2z & = & -5 \\ & y & & = & -3 \end{matrix}$.

cuya solución es $S = \{(x, y, z) | x = -5 - 2z, y = -3; x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Se puede verificar fácilmente que este conjunto solución satisface al sistema de ecuaciones original.

El procedimiento llevado a cabo se conoce como método de eliminación gaussiana.

Resolución por el Método de Gauss

Este método propone eliminar por medio de transformaciones elementales los coeficientes del sistema hasta obtener una matriz de un sistema equivalente. Este proceso se facilita al tomar en cada iteración (transformación) un pivote sobre el cual se realizan las operaciones elementales.

EJEMPLO. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{matrix} x & -y & +z & = & -3 \\ -3x & -y & +3z & = & -4 \\ -x & -y & +2z & = & -3 \end{matrix}$$

su matriz de coeficientes es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ -3 & -1 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

El primer pivote será el coeficiente 1 del primer renglón y la primera columna; a partir de él se realizan las transformaciones elementales sobre los otros dos renglones.

1. $3R_1 + R_2 \rightarrow R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 6 & -13 \\ -1 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

2. $R_1 + R_3 \rightarrow R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 6 & -13 \\ 0 & -2 & 3 & -6 \end{array}\right)$$

Ahora se tomará el elemento -4 del renglón dos y la columna dos como pivote.

3. $R_2 - 2R_3 \rightarrow R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 6 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

En el proceso se llegó a una ecuación degenerada. Por lo tanto, el sistema no tiene solución.

Escalonamiento

El método de Gauss también se conoce como escalonamiento, ya que el objetivo es dejar a la matriz como una escalera de ceros, lo más perfecta posible.

EJEMPLO. Las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

están escalonadas.

Un tipo especial de escalonamiento es cuando la primera entrada no nula de cada renglón es 1 y sobre esa columna tanto arriba como abajo hay ceros. Las matrices que cumplen con esa característica son matrices canónicas escalonadas.

EJEMPLO. Las matrices

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

están en forma canónica escalonada.