

## Ecuación Lineal

Varios problemas de la Física o la vida usual plantean una ecuación con varias incógnitas. Dicho planteamiento se llama ecuación lineal, cuya forma general es

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

donde  $b$  es el término independiente, los valores  $a_i$  son los coeficientes, y los símbolos  $x_i$  son las incógnitas. La solución es un conjunto de valores  $k_i$  tales que

$$a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + \cdots + a_nk_n = b$$

**EJEMPLO.** Un barista prepara su mezcla de café con diversos tipos de grano. Si su mezcla contiene dos quintas partes de caracolillo, una quinta parte de planchuela y el resto de pluma, ¿qué cantidad de cada tipo de grano necesita el barista para obtener 100 [gr] de mezcla?



El problema se resuelve al considerar diferentes pesos de los granos. Tomando

$$\begin{aligned} \text{caracolillo} &= C \\ \text{pluma} &= P \\ \text{planchuela} &= L \end{aligned}$$

la ecuación planteada es

$$\frac{2}{5}C + \frac{1}{5}L + \frac{2}{5}P = 100$$

Una solución puede estar dada por

$$P = 250 - C - \frac{1}{2}L$$

donde  $C$  y  $L$  son variables libres (su valor es elegido libremente), siempre y cuando sean valores coherentes y consistentes con la naturaleza del problema.

## Sistema de Ecuaciones Lineales

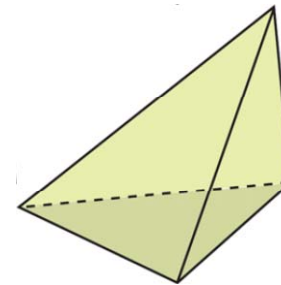
Si en lugar de una ecuación se tuviesen dos o más ecuaciones con las mismas variables, entonces se hablaría de un sistema de ecuaciones lineales de  $m$  ecuaciones y  $n$  incógnitas:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & \cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 & \cdots & +a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +a_{m3}x_3 & \cdots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

donde los coeficientes  $a_{ij}$  forman la llamada matriz de coeficientes, los símbolos  $b_i$  son el vector de términos independientes, y las literales  $x_i$  son el vector de incógnitas. La solución del sistema de ecuaciones lineales es un conjunto ordenado de valores  $k_i$  que representan el valor de las incógnitas:

$$S = \{(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n) | k_i \in \mathbb{C}\}$$

El conjunto solución satisface a todas y cada una de las ecuaciones del sistema.



**EJEMPLO.** Una pirámide triangular tiene una base cuyo perímetro mide 25 [cm]. Si la altura es igual al lado más grande de la base, ¿cuánto miden los lados del triángulo base?

Siendo los tres lados  $a$ ,  $b$  y  $c$ , el perímetro se calcula como

$$a + b + c = 25$$

Tomando la altura  $h$ , y  $a$  como el lado más grande de la base

$$a = h$$

el sistema de ecuaciones a resolver es

$$\begin{array}{rrcr} a & +b & +c & = 25 \\ a & & -h & = 0 \end{array}$$

Cuya solución está en función de dos lados de la base

$$S = \{(a, b, c, h) | a = h, c = 25 - a - b; a, b, c, h \in \mathbb{R}\}$$

### Clasificación de los sistemas de ecuaciones

Atendiendo a su solución, los sistemas de ecuaciones se agrupan en

- ✓ Compatibles - siempre tienen solución.
  - ⇒ determinados - tienen una solución única.
  - ⇒ indeterminados - tienen múltiples soluciones.
- ✓ Incompatibles - no tienen solución.

Los sistemas incompatibles generan ecuaciones llamadas degeneradas, las cuales se obtienen en el proceso de resolución.

**EJEMPLO.** El sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rrcr} a & -2b & +c & = -2 & \dots (1) \\ -2a & +4b & -2c & = 1 & \dots (2) \\ a & +b & +c & = 1 & \dots (3) \end{array}$$

es incompatible puesto que al sumar dos veces la ecuación (1) con la ecuación (2) se obtiene una ecuación degenerada.

$$\begin{array}{rrcr} 2a & -4b & +2c & = -4 \\ -2a & +4b & -2c & = 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & = -3 \end{array}$$

lo cual es una incoherencia.

### Sistemas Homogéneos y Soluciones Triviales

Existen sistemas de ecuaciones cuyo vector de términos independientes está compuesto por ceros. Dichos sistemas se llaman homogéneos. Una característica importante en ellos es que siempre tienen solución.

Los sistemas homogéneos pueden poseer dos tipos de soluciones: triviales, consistentes únicamente en ceros; y no triviales, que pueden poseer más soluciones además de la trivial.

**EJEMPLO.** Sea el sistema de ecuaciones lineales homogéneo

$$\begin{array}{rrcr} x & +y & -z & = 0 & \dots (1) \\ -2x & +y & +z & = 0 & \dots (2) \\ & -y & +z & = 0 & \dots (3) \end{array}$$

De la ecuación (3)

$$y = z \dots (4)$$

Al sustituir (4) en (1)

$$x + y - y = 0 \Rightarrow x = 0 \dots (5)$$

Y al sustituir (4) y (5) en (2)

$$-2(0) + y + y = 0 \Rightarrow 2y = 0 \therefore y = 0, z = 0$$

La única solución (sistema compatible determinado) es  $S = \{(0, 0, 0)\}$ .

Ahora sea el sistema

$$\begin{array}{rrcr} x & +y & +2z & = 0 & \dots (1) \\ -x & +y & +2z & = 0 & \dots (2) \\ -x & -y & -2z & = 0 & \dots (3) \end{array}$$

Al sumar (1) y (2) se obtiene

$$2y + 4z = 0 \Rightarrow y = -2z \dots (4)$$

Sustituyendo (4) en (3)

$$-x - (-2z) - 2z = 0 \Rightarrow -x + 2z - 2z = 0 \therefore x = 0 \dots (5)$$

Al sustituir (5) en (1), (2) o (3) se llega a la ecuación (4). Esto indica que  $y$  depende de  $z$ . El sistema de ecuaciones es compatible indeterminado y posee múltiples soluciones:

$$S = \{(0, -2z, z) | z \in \mathbb{R}\}$$