Raíces irracionales

Este tipo de raíces pueden encontrarse con:

- ✓ La gráfica del polinomio.
- ✓ Los cambios de signo en un intervalo.
- ✓ Las cotas de las raíces reales.
- ✓ Un método numérico.

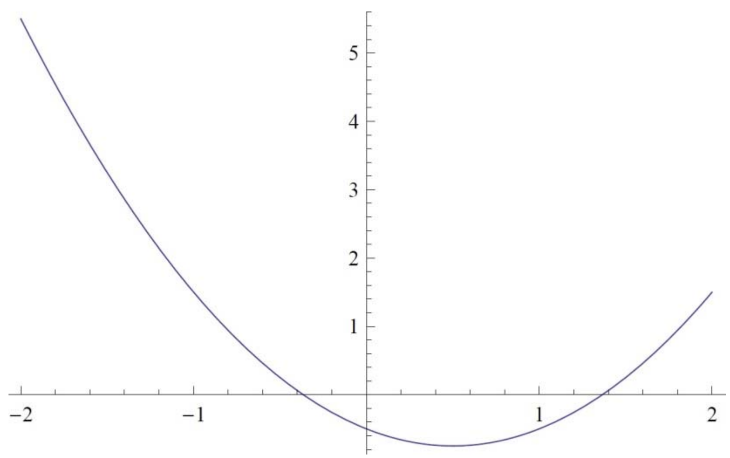
Gráfica del polinomio

La gráfica de un polinomio es una curva suave y continua que puede ser construida por medio de evaluaciones del polinomio en puntos dados Las raíces son los puntos en los cuales la gráfica del polinomio corta al eje de las abscisas.

EJEMPLO. Para el polinomio

$$p(x) = x^2 - x - \frac{1}{2}$$

Su gráfica es



Una de sus raíces se encuentra entre 1 y 2, mientras que la otra está entre -1 y 0.

Cambios de signo en el intervalo

Al tabular un polinomio se puede observar que en los resultados se obtienen lugares donde el polinomio evaluado cambia de signo. Esos lugares indican la presencia de una raíz.

EJEMPLO. La tabulación con incrementos de 0.4 para $p(x) = x^2 - x - \frac{1}{2}$ es

x	-1.0	-0.6	-0.2	0.2	0.6	1.0	1.4	1.8
y	1.50	0.46	-0.26	-0.66	-0.74	-0.50	0.06	0.94

Al ver el cambio de signo entre $x = -0.6$ y $x = -0.2$ se deduce que la primera raíz está en ese intervalo. La segunda raíz se encuentra entre $x = 1.0$ y $x = 1.4$.

Cotas de las raíces reales

Una forma de restringir el intervalo en el cual se encuentran las raíces es mediante las cotas. El proceso opera utilizando el concepto de conjunto acotado superior o inferiormente. Los criterios para definir una cota superior o inferior son:

1. Si al dividir un polinomio entre $x - s$ no existen números negativos en el tercer renglón de la división sintética, entonces s es una cota superior de las raíces de $p(x)$.
2. Si al dividir un polinomio entre $x - t$ existen números alternados en signo en el tercer renglón de la división sintética, entonces t es una cota inferior de las raíces de $p(x)$.

EJEMPLO. Al aplicar la división sintética a $p(x) = x^2 - x - \frac{1}{2}$ con $g(x) = x + 1$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & & -1 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & \frac{3}{2} \end{array}$$

se obtiene una alternancia en los signos de los coeficientes del tercer renglón. Por lo tanto -1 es una cota inferior de las raíces. Para la división con el polinomio $h(x) = x - 2$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}$$

En este caso, la división sintética tiene coeficientes positivos en su tercer renglón; en consecuencia, 2 es una cota superior de las raíces del polinomio.

Raíces irracionales conjugadas

Si un polinomio $p(x)$ tiene a una raíz de la forma $\alpha = a + b\sqrt{c}$, entonces su conjugada también será raíz. Esto se debe a la diferencia de cuadrados, producto de la multiplicación de binomios conjugados. Por lo tanto, es absolutamente necesario que los coeficientes del polinomio sean siempre racionales.

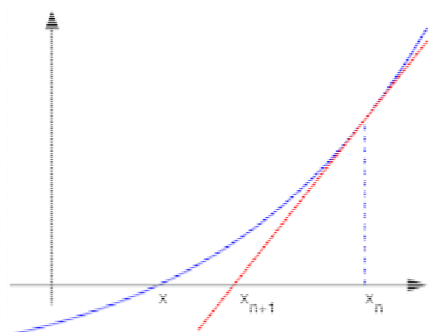
EJEMPLO. El polinomio $p(x) = x^2 - x - \frac{1}{2}$ puede factorizarse mediante la ecuación general de segundo grado

$$\alpha_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)\left(-\frac{1}{2}\right)}}{2(1)}$$
$$= \frac{1 \pm \sqrt{1+2}}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Puesto que las raíces son conjugadas, a partir de una puede encontrarse la otra.

Método de Newton-Raphson

La forma más sencilla de encontrar raíces irracionales es mediante un método numérico. Un método muy eficaz debido a su rápida convergencia es el método de Newton-Raphson, que se basa en el concepto de derivada para alcanzar la raíz de una ecuación a partir de un punto cercano dado.



El método indica que la abscisa al origen de la recta tangente a la curva en un punto se acerca más a la raíz de la función. Es decir, la recta pasa por los puntos $(x_{n+1}, 0)$ y $\left(x_n, f(x_n)\right)$ y puede calcularse la pendiente

$$m = -\frac{f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}$$

Puesto que la pendiente es la derivada de la función en el punto dado, se procede al siguiente desarrollo

$$f'(x_n) = -\frac{f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}$$
$$f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -f(x_n)$$
$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Ésta es la expresión que evalúa el método recurrente de Newton-Raphson.

EJEMPLO. Las raíces del polinomio $p(x) = x^2 - x - \frac{1}{2}$ se obtienen al aplicar el método numérico en forma iterativa, considerando al resultado actual como la raíz.

x_n	$p(x_n)$	$p'(x_n)$	x_{n+1}
0.0000	-0.5000	-1.0000	-0.5000
-0.5000	0.2500	-2.0000	-0.3750
-0.3750	0.0156	-1.7500	-0.3661
-0.3660	0.0000	-1.7321	-0.3660
-0.3660	0.0000	-1.7321	-0.3660

Una raíz del polinomio es $\alpha_1 = -0.3660 \approx \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

x_n	$p(x_n)$	$p'(x_n)$	x_{n+1}
2.0000	1.5000	3.0000	1.5000
1.5000	0.2500	2.0000	1.3750
1.3661	0.0156	1.7500	1.3661
1.3660	0.0000	1.7321	1.3660
1.3660	0.0000	1.7321	1.3660

La otra raíz arroja que $\alpha_2 = 1.3660 \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. Se comprueba que las dos raíces son irracionales conjugadas y se encuentran en el intervalo $(-1, 2)$.