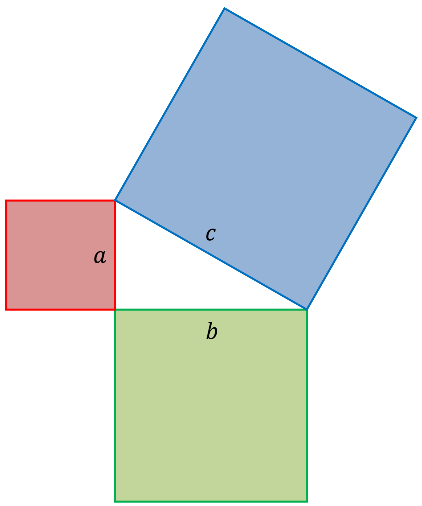
## Teorema de Pitágoras

Dado un triángulo rectángulo, cuyos lados son $a$, $b$ y $c$, se define al teorema de Pitágoras como

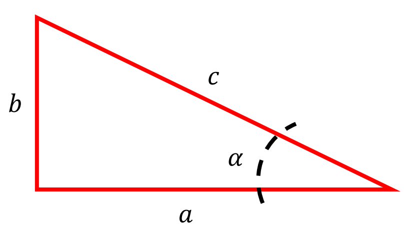
La suma de los cuadrados de $a$ y $b$ (catetos) es igual al cuadrado de $c$ (hipotenusa). Es decir,

$$a^2 + b^2 = c^2$$



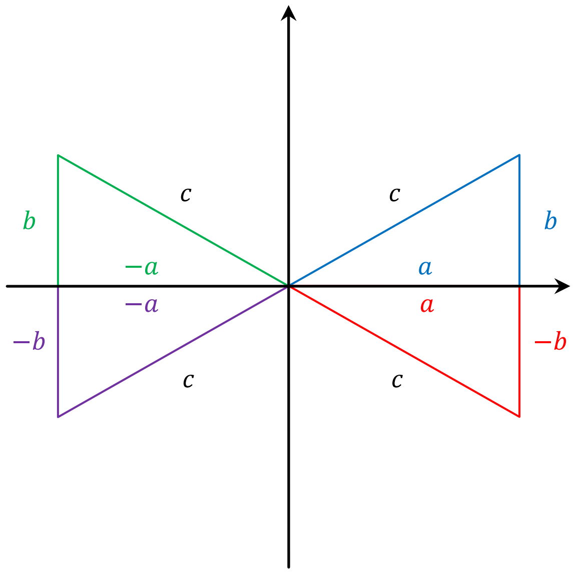

## Funciones Trigonométricas

A partir de un triángulo rectángulo se definen las 6 funciones trigonométricas para un ángulo agudo cualquiera:




1. $\sin\alpha = \frac{b}{c}$
2. $\cos\alpha = \frac{a}{c}$
3. $\tan\alpha = \frac{b}{a}$
4. $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$
5. $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$
6. $\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$

A partir de la definición de cada función trigonométrica, se pueden obtener los signos de sus valores en cada cuadrante del sistema de coordenadas $XY$. Tomando en cuenta que las funciones cotangente, secante y cosecante se obtienen a partir de la tangente, coseno y seno, respectivamente, solo se requiere deducir el signo de las últimas tres funciones.




El signo de la función trigonométrica depende del cuadrante en el que se ubique el ángulo. Hay que tomar en cuenta que para ángulos mayores a 90 grados se pueden emplear las identidades de suma y resta de ángulos para calcular el valor correcto.

Tomando en cuenta la figura anterior, cada cuadrante tomará los valores de los catetos con el respectivo color: primer cuadrante, azul; segundo cuadrante, verde; tercero, morado; cuarto, rojo. La hipotenusa siempre es positiva. Con esto, las funciones trigonométricas quedan como:

- ✓ Primer cuadrante: seno, coseno y tangente siempre positivos.
- ✓ Segundo cuadrante: seno positivo, coseno y tangente negativos.
- ✓ Tercer cuadrante: seno y coseno negativos; tangente positiva.

- ✓ Cuarto cuadrante: seno negativo y tangente negativos; coseno positivo.

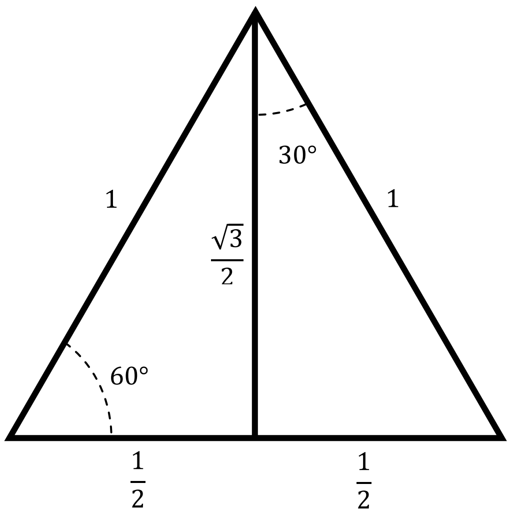
Se hace hincapié que dependiendo el cuadrante, el ángulo varía en magnitud, medido desde la parte positiva del eje de las abscisas.

## Seno, Coseno y Tangente de Ángulos Trascendentes

Para calcular los valores de los ángulos trascendentes se recurrirá a tres lugares geométricos: un triángulo equilátero unitario, una cuadrado unitario, y un segmento de recta de longitud unitaria.

### Ángulos de $30°$ y $60°$

Un triángulo equilátero tiene sus tres ángulos iguales a $60°$. Al dividirlo por la mitad (altura del triángulo), el ángulo superior se bisecta; es decir, medirá $30°$. La altura se calcula por medio del teorema de Pitágoras, ya que medio triángulo equilátero es un triángulo rectángulo.



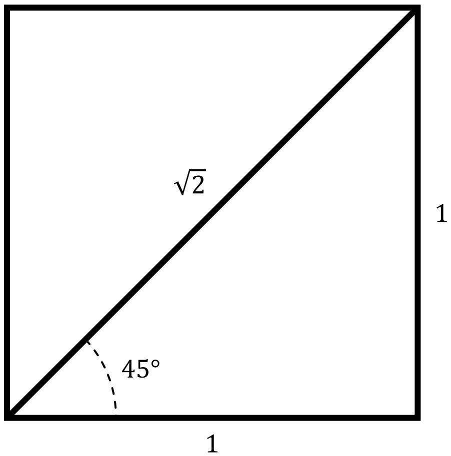

En ambos casos la hipotenusa vale uno, mientras que el cateto opuesto mide $\frac{\sqrt{3}}{2}$ para $60°$ y $\frac{1}{2}$ para $30°$, y el cateto adyacente mide $\frac{\sqrt{3}}{2}$ para $30°$ y $\frac{1}{2}$ para $60°$. Por lo tanto:

$$\sin 30° = \frac{\frac{1}{2}}{1} \Rightarrow \frac{1}{2}, \qquad \cos 30° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \tan 30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos 60° = \frac{\frac{1}{2}}{1} \Rightarrow \frac{1}{2}, \qquad \tan 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sqrt{3}$$

### Ángulo $45°$

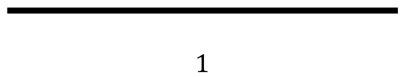
En este caso, el cuadrado unitario será de utilidad. Cada uno de sus vértices forma un ángulo interior de $90°$. Al dividirlo por la mitad (a través de la diagonal), el ángulo se bisecta; es decir, medirá $45°$. Se formará un triángulo rectángulo isósceles, donde sus catetos miden los mismo, y la hipotenusa se obtiene mediante el teorema de Pitágoras..




$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \cos 30° = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \tan 30° = \frac{1}{1} \Rightarrow 1$$

### Ángulos de $0°$ y $90°$

Para estos ángulos se utilizará el segmento de recta unitario. Cabe destacar que un segmento de recta representa un triángulo degenerado; es decir, un triángulo cuyos vértices son colineales. En este caso, no existe uno de los catetos, dependiendo de la posición.




Para el segmento de recta horizontal, el cateto opuesto tiene longitud nula, mientras que la hipotenusa y el cateto adyacente valen lo mismo. Este segmento representa el ángulo de $0°$.

$$\sin 0° = \frac{0}{1} \Rightarrow 0, \qquad \cos 0° = \frac{1}{1} \Rightarrow 1, \qquad \tan 0° = \frac{0}{1} \Rightarrow 0$$


Para el segmento de recta vertical (que representa $90°$), el cateto adyacente es nulo; el cateto opuesto y la hipotenusa miden lo mismo.

$$\sin 90° = \frac{1}{1} \Rightarrow 1, \qquad \cos 90° = \frac{0}{1} \Rightarrow 0, \qquad \tan 0° = \frac{1}{0} \Rightarrow \nexists$$